VII.4 Operatorhalbgruppen

Für eine $(n \times n)$-Matrix A wird die Lösung des Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$u' = Au, \quad u(0) = x_0 \tag{VII.19}$$

bekanntlich durch die $\mathbb{C}^n$-wertige Funktion $u(t) = e^{tA}x_0$ gegeben. Auch partielle Differentialgleichungen können häufig in der Form (VII.19) geschrieben werden; dann ist A jedoch ein (unbeschränkter) Operator in einem Banach- oder Hilbertraum. In diesem Abschnitt soll die Frage untersucht werden, für welche Operatoren A das Exponential e^{tA} definiert werden kann. Für selbstadjungierte Operatoren $A\colon H \supset \mathrm{dom}(A) \to H$ mit nach oben beschränktem Spektrum und $t \geq 0$ ist das nach dem Spektralsatz VII.3.2 der Fall, da dann $t \mapsto e^{ta}$ eine stetige beschränkte Funktion auf dem Spektrum $\sigma(A)$ ist. Die e^{tA}, $t \geq 0$, sind beschränkte Operatoren mit

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}, \quad s, t \geq 0;$$

sie bilden also eine Halbgruppe von Operatoren. Daß man im unendlichdimensionalen Fall nur positive t betrachtet, liegt in der Natur der Sache; z.B. ist das Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung $u' = \Delta u$ für negative Zeiten i.a. nicht lösbar.

Halbgruppen von Operatoren auf Banachräumen bilden den Gegenstand dieses Abschnitts, in dem X stets einen komplexen Banachraum bezeichnet.

Definition VII.4.1 Eine *stark stetige Operatorhalbgruppe* (oder C_0-*Halbgruppe*) ist eine Familie $T_t\colon X \to X$, $t \geq 0$, von stetigen linearen Operatoren auf einem Banachraum X mit folgenden Eigenschaften:

(1) $T_0 = \mathrm{Id}$,
(2) $T_{s+t} = T_s T_t$ für alle $s, t \geq 0$,
(3) $\lim_{t\to 0} T_t x = x$ für alle $x \in X$.

Gilt statt (3) die stärkere Forderung

(3′) $\lim_{t\to 0} \|T_t - \mathrm{Id}\| = 0$,

so spricht man von einer *normstetigen Halbgruppe.*

In Abschnitt VIII.1 werden wir die starke Operatortopologie auf $L(X)$ einführen; die Bedingung (3) bedeutet dann die Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ in dieser Topologie bei $t = 0$. Analog besagt (3′) die Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ bei $t = 0$ in der Operatornormtopologie. Beachte noch, daß wegen (2) die Operatoren einer Halbgruppe notwendig kommutieren.

Beispiele. (a) Sei $A \in L(X)$ und

$$T_t = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Die Reihe konvergiert absolut in $L(X)$; daher definiert sie einen stetigen linearen Operator. $(T_t)_{t\geq 0}$ ist eine normstetige Halbgruppe: (1) ist trivial, (2) zeigt man wie in der Analysisvorlesung die Funktionalgleichung $e^{x+y} = e^x e^y$ der Exponentialfunktion, und für (3′) beachte nur

$$\|T_t - \mathrm{Id}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} t^n = e^{t\|A\|} - 1 \to 0$$

mit $t \to 0$. In diesem Beispiel erhalten wir sogar eine Gruppe, wenn wir $t \in \mathbb{R}$ zulassen.

(b) Wir betrachten die *Translationshalbgruppe*

$$(T_t f)(x) = f(x+t)$$

auf $L^p(\mathbb{R})$, $L^p[0,\infty)$, $C_0(\mathbb{R})$ oder $C_0[0,\infty)$. Es ist klar, daß jeweils (1) und (2) erfüllt sind. (3) sieht man auf $C_0(\mathbb{R})$ so: Ist $f \in C_0(\mathbb{R})$, so ist f gleichmäßig stetig (Beweis?). Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $\delta > 0$ mit

$$|x-y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Daher gilt für $0 < t \leq \delta$

$$\|T_t f - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Im L^p-Fall für $1 \leq p < \infty$ zeigt man zuerst $T_t f \to f$ auf dem dichten Unterraum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und schließt daraus mittels $\sup_t \|T_t\| < \infty$, daß (3) gilt; vgl. Aufgabe II.5.5. Für $p = \infty$ gilt (3) nicht, wie man am Beispiel $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ sieht.

Ist die Grundmenge $[0,\infty)$, sind die Beweise identisch; im Fall von $\mathbb{R}$ erhält man aber sogar eine Gruppe von Operatoren, wenn man auch negative t zuläßt.

(c) Die *Wärmeleitungshalbgruppe* ist durch $T_0 = \mathrm{Id}$ bzw.

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\Bigl(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Bigr) f(y)\, dy \tag{VII.20}$$

auf diversen Funktionenräumen auf $\mathbb{R}^d$ erklärt. Wir behandeln den Fall $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Setzt man

$$\gamma_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Bigl(-\frac{|x|^2}{4t}\Bigr), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0,$$

so kann (VII.20) mittels der Faltung als

$$T_t f = \gamma_t * f$$

geschrieben werden. Die Youngsche Ungleichung (Satz II.4.4, sie gilt für $\mathbb{R}^d$ wie für $\mathbb{T}$) zeigt

$$\|T_t f\|_p \leq \|\gamma_t\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p;$$

daher sind alle T_t stetige lineare Operatoren mit Norm ≤ 1 auf $L^p(\mathbb{R}^d)$. Die Eigenschaft (1) einer C_0-Halbgruppe gilt definitionsgemäß, und Eigenschaft (3) zeigt man mit einer ähnlichen Technik wie in Aufgabe II.5.6. Es bleibt, (2) nachzurechnen, das wegen der Assoziativität der Faltung auf

$$\gamma_{s+t} = \gamma_s * \gamma_t \qquad \forall s, t > 0$$

hinausläuft. Diese Gleichung kann elementar verifiziert werden, wenn man nur

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-a^2 y^2 + 2by - c^2)\, dy = \frac{\pi^{d/2}}{a^d} \exp\Bigl(-c^2 + \frac{b^2}{a^2}\Bigr), \quad a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^d,$$

berücksichtigt; alternativ kann man mittels Fouriertransformation und Aufgabe VII.4.10 argumentieren.

(VII.20) definiert auch auf dem Raum $C_0(\mathbb{R}^d)$ eine C_0-Halbgruppe (Aufgabe VII.5.25). Sie wird wegen des Zusammenhangs zur Brownschen Bewegung auch *Brownsche Halbgruppe* genannt. Der Name Wärmeleitungshalbgruppe reflektiert den engen Zusammenhang dieses Beispiels zur Wärmeleitungsgleichung, vgl. Satz VII.4.7.

(d) Auch in der Theorie der Delay-Gleichungen (Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument) treten Operatorhalbgruppen auf. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung hängt $u'(t)$ nur von $u(t)$ ab, bei einer Delay-Gleichung jedoch von den $u(s)$ in einem Intervall $t-\sigma \leq s \leq t$. Diese $u(s)$ bilden die Vorgeschichte von $u(t)$. Wir betrachten ein lineares autonomes Delay-Anfangswertproblem der Form

$$u'(t) = \ell(u^{(t)}), \quad u(0) = \varphi \in C[-\sigma, 0]; \tag{VII.21}$$

dabei bezeichnet $u^{(t)}(s) = u(s+t)$, $-\sigma \leq s \leq 0$, und ℓ ein stetiges lineares Funktional auf dem Banachraum $C[-\sigma, 0]$. Ein einfaches Beispiel erhält man mit $\ell = \delta_{-\sigma}$, dann lautet die Gleichung $u'(t) = u(t-\sigma)$.

Aus der Theorie der Delay-Gleichungen ist bekannt, daß (VII.21) genau eine Lösung besitzt[4]; diese wollen wir in der Form $u^{(t)} = T_t\varphi$ mit einem Lösungsoperator T_t schreiben. Die T_t sind dann lineare Abbildungen auf $C[-\sigma, 0]$, und aus der Eindeutigkeit der Lösung für jeden Anfangswert folgt die Halbgruppeneigenschaft $T_{s+t} = T_s T_t$. Nach Konstruktion gilt $T_0 = \mathrm{Id}$ sowie für $t > 0$ und $-\sigma \leq s \leq 0$

$$(T_t\varphi)(s) = \begin{cases} \varphi(s+t) & \text{falls } s+t \leq 0, \\ \varphi(0) + \int_0^{s+t} \ell(T_\vartheta\varphi)\, d\vartheta & \text{falls } s+t > 0. \end{cases} \tag{VII.22}$$

[4]Vgl. J. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag 1993, Theorem 6.1.1.

Daraus folgt die Abschätzung

$$\|T_t\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \|\ell\| \int_0^t \|T_\vartheta\varphi\|_\infty \, d\vartheta$$

(beachte $s+t \leq t$) und weiter nach der Gronwallschen Ungleichung (siehe z.B. Walter [1993], S. 257)

$$\|T_t\varphi\|_\infty \leq e^{\|\ell\|t}\|\varphi\|_\infty \qquad \forall\varphi \in C[-\sigma, 0].$$

Das liefert die Stetigkeit der T_t auf $C[-\sigma, 0]$ und mit (VII.22) auch noch $\lim_{t\to 0} \|T_t\varphi - \varphi\|_\infty = 0$. Damit ist gezeigt, daß die T_t, $t \geq 0$, eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf $C[-\sigma, 0]$ bilden.

Wir wollen nun zwei einfache Eigenschaften einer C_0-Halbgruppe kennenlernen.

Lemma VII.4.2 *Ist $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X, so existieren $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|T_t\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{VII.23}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß ein $\tau > 0$ mit

$$K := \sup_{0\leq t\leq\tau} \|T_t\| < \infty \tag{VII.24}$$

existiert. Wäre das falsch, gäbe es eine Nullfolge (t_n) mit $\|T_{t_n}\| \to \infty$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus existierte dann ein $x \in X$ mit $\|T_{t_n}x\| \to \infty$ im Widerspruch zur Eigenschaft (3) einer C_0-Halbgruppe.

Seien nun K und τ wie in (VII.24). Schreibe eine Zahl $t \geq 0$ als $t = n\tau+\vartheta$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq \vartheta < \tau$; dann gilt

$$\|T_t\| = \|T_\tau^n T_\vartheta\| \leq \|T_\tau\|^n \|T_\vartheta\| \leq K^{n+1} \leq K(K^{1/\tau})^t,$$

letzteres wegen $n \leq t/\tau$, $K \geq \|T_0\| = 1$. Also ist (VII.23) mit $M = K$ und $\omega = (\log K)/\tau$ erfüllt. □

Das Infimum über die in (VII.23) zulässigen ω, genauer

$$\omega_0 := \inf\{\omega\colon \exists M = M(\omega) \text{ mit (VII.23)}\}, \tag{VII.25}$$

heißt der *Typ* oder die (exponentielle) *Wachstumsschranke* der Halbgruppe. Das Infimum braucht übrigens nicht angenommen zu werden und kann $-\infty$ sein (Aufgaben VII.5.27 und VII.5.28).

Wenn man in (VII.23) $M = 1$ und $\omega = 0$ wählen kann, mit anderen Worten wenn $\|T_t\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt, heißt die C_0-Halbgruppe (T_t) eine *Kontraktionshalbgruppe.*

Lemma VII.4.3 *Ist* (T_t) *eine* C_0*-Halbgruppe auf einem Banachraum* X*, so ist die Abbildung*

$$[0,\infty)\times X\to X,\quad (t,x)\mapsto T_t x$$

stetig, und zwar gleichmäßig in t *auf kompakten Teilmengen von* $[0,\infty)$*. Insbesondere ist für jedes* $x\in X$ *die vektorwertige Funktion* $u\colon t\mapsto T_t x$ *stetig; in Zeichen* $u\in C([0,\infty),X)$*.*

Beweis. Seien $x\in X$ und $t_0>0$. Zu $\delta>0$ wähle $h_0>0$ mit

$$\|T_h x - x\|\le\delta\qquad\forall 0\le h\le h_0.$$

Für den Beweis des Satzes reicht es, für eine gewisse Konstante C die Abschätzung

$$\|x-y\|\le\delta,\ 0\le s\le t\le t_0,\ t-s\le h_0\quad\Rightarrow\quad\|T_t x - T_s y\|\le C\delta$$

zu beweisen. Seien dazu M und ω wie in (VII.23); es folgt

$$\begin{aligned}\|T_t x - T_s y\| &\le \|T_t x - T_s x\| + \|T_s x - T_s y\|\\ &\le \|T_s\|\,\|T_{t-s}x - x\| + \|T_s\|\,\|x-y\|\\ &\le Me^{\omega s}\delta + Me^{\omega s}\delta.\end{aligned}$$

Man setze also $C=2M$, falls $\omega\le 0$, und $C=2Me^{\omega t_0}$, falls $\omega>0$. □

Wir wollen einer C_0-Halbgruppe einen (in der Regel unbeschränkten) Operator, ihren Erzeuger, zuordnen. Eine Hauptaufgabe der Halbgruppentheorie ist, den Zusammenhang dieser beiden Objekte zu studieren.

Für eine Halbgruppe $(e^{tA})_{t\ge 0}$ wie in Beispiel (a) würde man A als „Erzeuger“ der Halbgruppe ansehen. Um nun A aus der Exponentialfunktion e^{tA} zurückzuerhalten, muß man diese differenzieren. Diese Idee steht bei der folgenden Definition Pate.

Definition VII.4.4 Sei $(T_t)_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X. Der *infinitesimale Erzeuger* (kurz *Erzeuger*) von (T_t) ist der Operator

$$Ax=\lim_{h\to 0}\frac{T_h x - x}{h}$$

auf dem Definitionsbereich

$$\operatorname{dom}(A)=\left\{x\in X\colon\ \lim_{h\to 0}\frac{T_h x - x}{h}\ \text{existiert}\right\}.$$

Mit Hilfe der vektorwertigen Funktionen $u_{(x)}\colon t \mapsto T_t x$ läßt sich dom(A) als $\{x\colon u'_{(x)}(0)$ existiert$\}$ und Ax als (rechtsseitige) Ableitung $u'_{(x)}(0)$ deuten.

Wir berechnen die Erzeuger der Halbgruppen aus den obigen Beispielen. Dabei stellt sich heraus, daß A wirklich in der Regel ein unbeschränkter Operator ist; siehe dazu auch Satz VII.4.9.

Beispiele. (a) Der Erzeuger der Halbgruppe (e^{tA}) ist A selbst; es gilt ja

$$\left\|\frac{e^{hA}-\mathrm{Id}}{h}-A\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^{n-1}A^n}{n!}\right\| \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^{n-1}\|A\|^n}{n!} \le h\|A\|^2 e^{h\|A\|} \to 0.$$

Ferner ist hier der Definitionsbereich des Erzeugers ganz X.

(b) Bei der Translationshalbgruppe gilt punktweise

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T_h f(x)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d^+ f}{dx}(x);$$

d^+/dx bezeichnet die rechtsseitige Ableitung. Daher ist zu vermuten, daß der Erzeuger A der Ableitungsoperator $f \mapsto f'$ ist. Wir bestätigen das in dem Fall, daß die T_t auf $C_0(\mathbb{R})$ (oder $C_0[0,\infty)$) erklärt sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(A) &= \{f \in C_0(\mathbb{R})\colon f' \text{ existiert und } f' \in C_0(\mathbb{R})\}, \\ Af &= f'. \end{aligned}$$

Sei als erstes $f \in C_0(\mathbb{R})$ differenzierbar mit $f' \in C_0(\mathbb{R})$. Dann ist f' gleichmäßig stetig, woraus mit $h \to 0^+$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f'(y)\,dy - f'(x)\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f'(y)-f'(x)|\,dy \ \to\ 0 \end{aligned}$$

gleichmäßig in x folgt. Das heißt $f \in \mathrm{dom}(A)$ und $Af = f'$.

Ist umgekehrt $f \in \mathrm{dom}(A)$, so zeigt das punktweise Argument, daß f rechtsseitig differenzierbar ist; und da Af definitionsgemäß in $C_0(\mathbb{R})$ liegt, ist die rechtsseitige Ableitung stetig. Daraus folgt aber die Differenzierbarkeit von f schlechthin[5].

In der L^p-Theorie ist der Definitionsbereich des Erzeugers schwieriger zu beschreiben. Es sei an den Begriff der absolutstetigen Funktion erinnert (Definition A.1.9) und daran, daß eine solche Funktion fast überall differenzierbar ist (Satz A.1.10). Dann kann man für den Erzeuger der Translationshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, zeigen:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(A) &= \{f \in L^p(\mathbb{R})\colon f \text{ ist absolutstetig und } f' \in L^p(\mathbb{R})\}, \\ Af &= f'. \end{aligned}$$

[5] Siehe W. Walter, *Analysis I*, Springer-Verlag 1985, Satz 12.25.

(c) Der Erzeuger der Wärmeleitungshalbgruppe ist der Laplaceoperator. Wir betrachten im Detail den Fall $p = 2$; hier sieht man das am schnellsten mittels der Fouriertransformation ein. Zunächst ist festzustellen, daß alle $\gamma_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sind. Da die Faltung zweier Schwartzfunktionen wieder eine Schwartzfunktion ist (Aufgabe VII.4.10), gilt $T_t\big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\big) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ für alle $t > 0$. Als erstes wird nun

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_h * f - f}{h} = \Delta f \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \tag{VII.26}$$

(mit Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^d)$) behauptet. Da die Fouriertransformation ein Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist, der den Schwartzraum invariant läßt (Satz V.2.8), ist (VII.26) wegen Aufgabe VII.4.10 äquivalent zu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2\pi}^d \mathscr{F}\gamma_h \cdot \mathscr{F}f - \mathscr{F}f}{h} = \mathscr{F}(\Delta f) \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Weiter gelten nach Lemma V.2.6 und Lemma V.2.4

$$\mathscr{F}\gamma_t(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-t\xi^2}, \quad \mathscr{F}(\Delta f)(\xi) = -\xi^2 \mathscr{F}f(\xi),$$

und da die Fouriertransformation ein Isomorphismus auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ist, ist (VII.26) schließlich zu

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{hq}g - g}{h} = qg \qquad \forall g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \tag{VII.27}$$

äquivalent, wo $q(\xi) = -\xi^2$ gesetzt und wieder die Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^d)$ gemeint ist. Um (VII.27) einzusehen, betrachte die Hilfsfunktion

$$\Phi(z) = \frac{e^z - 1}{z} - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!};$$

damit gilt

$$\left\| \frac{e^{hq}g - g}{h} - qg \right\|_2^2 = \|(\Phi \circ (hq)) \cdot qg\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(-h\xi^2)||\xi^2 g(\xi)|^2 \, d\xi \to 0$$

mit $h \to 0$ nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz, denn der Integrand strebt punktweise gegen 0 und wird von der integrierbaren Funktion $|qg|^2$ majorisiert (beachte $-1 \le \Phi(z) \le 0$ für $z \le 0$). Mehr noch: das Argument zeigt, daß (VII.26) für alle $f \in L^2$ gilt, für die $q \cdot \mathscr{F}f$ in L^2 liegt, und das ist genau für die f aus dem Sobolevraum $W^2(\mathbb{R}^d)$ der Fall (Satz V.2.14); hier ist der Laplaceoperator natürlich im Sinn der schwachen Ableitungen zu verstehen. Damit ist für $p = 2$

$$\mathrm{dom}(A) = W^2(\mathbb{R}^d), \quad Af = \Delta f$$

gezeigt. Im Fall $p \neq 2$ kann man den Definitionsbereich von Δ als $\{f \in L^p\colon \Delta f \in L^p\}$ beschreiben; hier werden Ableitungen im Distributionensinn aufgefaßt, siehe Abschnitt VIII.5. Für $1 < p < \infty$ stimmt $\mathrm{dom}(\Delta)$ mit dem auf Seite pageref seite206 angesprochenen Sobolevraum $W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ überein, aber nicht für $p = 1$.

(d) In diesem Beispiel ist der Erzeuger der Ableitungsoperator $A\varphi = \varphi'$ auf dem Definitionsbereich

$$\mathrm{dom}(A) = \{\varphi \in C^1[-\sigma, 0)\colon \varphi'(0) = \ell(\varphi)\}.$$

Ist nämlich zunächst $\varphi \in \mathrm{dom}(A)$, so folgt aus (VII.22)

$$(A\varphi)(s) = \lim_{h\to 0} \frac{T_h\varphi(s) - \varphi(s)}{h} = \begin{cases} \dfrac{d^+\varphi}{dt}(s) & -\sigma \leq s < 0, \\ \ell(\varphi) & s = 0. \end{cases} \tag{VII.28}$$

Da $A\varphi$ stetig ist, muß φ (beidseitig) stetig differenzierbar sein (vgl. das Argument in Beispiel (b)); also ist $\varphi \in C^1[-\sigma, 0)$, $\varphi(0) = \ell(\varphi)$ und $A\varphi = \varphi'$. Daß umgekehrt ein solches φ zu $\mathrm{dom}(A)$ gehört, ergibt sich aus der gleichmäßigen Konvergenz bzgl. s in (VII.22).

Als nächstes werden einige Eigenschaften des infinitesimalen Erzeugers A einer C_0-Halbgruppe studiert. Aus der Definition von $\mathrm{dom}(A)$ ergibt sich nicht unmittelbar, daß $\mathrm{dom}(A)$ mehr als die 0 enthält. Unser erstes Ziel ist zu zeigen, daß A stets dicht definiert und abgeschlossen ist. Dazu wird das Riemannintegral für banachraumwertige stetige Funktionen benötigt. Dieses kann wie im skalaren Fall als Grenzwert von Riemannschen Summen erklärt werden; es gelten dann sämtliche vertrauten Rechenregeln (Linearität, $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$ etc.) inklusive des Hauptsatzes

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)\, ds = u(t) \tag{VII.29}$$

für stetige Funktionen mit Werten in einem Banachraum. Die Beweise dieser Aussagen erfolgen wie im skalaren Fall. Ferner gilt für stetige lineare Operatoren T

$$T\Big(\int_a^b u(s)\, ds\Big) = \int_a^b T(u(s))\, ds. \tag{VII.30}$$

Zuerst nun ein wichtiges Lemma.

Lemma VII.4.5 *Sei A der Erzeuger der C_0-Halbgruppe (T_t) auf dem Banachraum X, und sei $t > 0$.*

(a) $\displaystyle\int_0^t T_s x\, ds \in \mathrm{dom}(A)$ *für alle $x \in X$, und* $A\Big(\displaystyle\int_0^t T_s x\, ds\Big) = T_t x - x.$

(b) $T_t(\mathrm{dom}(A)) \subset \mathrm{dom}(A)$.
(c) $T_t A x = A T_t x$ *für alle* $x \in \mathrm{dom}(A)$.
(d) $T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds$ *für alle* $x \in \mathrm{dom}(A)$.

Beweis. Beachte, daß die Funktionen $t \mapsto T_t x$ nach Lemma VII.4.3 stetig sind.

(a) Es gilt nach (VII.30) und (VII.29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left(T_h\Big(\int_0^t T_s x\, ds\Big) - \int_0^t T_s x\, ds\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T_{s+h} x\, ds - \int_0^t T_s x\, ds\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T_s x\, ds - \int_0^h T_s x\, ds\right) \\ &\to T_t x - T_0 x = T_t x - x \end{aligned}$$

mit $h \to 0$; daraus folgt (a).

(b), (c) Sei $x \in \mathrm{dom}(A)$. Dann konvergiert mit $h \to 0$

$$\frac{T_h(T_t x) - T_t x}{h} = T_t\Big(\frac{T_h x - x}{h}\Big) \to T_t A x,$$

denn T_t ist stetig. Also ist $T_t x \in \mathrm{dom}(A)$ und $A T_t x = T_t A x$.

(d) Sei $x \in \mathrm{dom}(A)$. Unter (a) wurde bewiesen

$$\begin{aligned} T_t x - x &= A \int_0^t T_s x\, ds = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(T_h \int_0^t T_s x\, ds - \int_0^t T_s x\, ds\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \int_0^t T_s\Big(\frac{T_h x - x}{h}\Big)\, ds. \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathrm{dom}(A)$ konvergiert

$$T_s\Big(\frac{T_h x - x}{h}\Big) \to T_s A x$$

für $h \to 0$, und zwar wegen $\sup_{s \le t} \|T_s\| < \infty$ (Lemma VII.4.2) gleichmäßig auf $[0, t]$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} \int_0^t T_s\Big(\frac{T_h x - x}{h}\Big)\, ds = \int_0^t T_s A x\, ds,$$

und (d) ist bewiesen. □

Es ist zu bemerken, daß in Beispiel (c) sogar $T_t x \in \mathrm{dom}(A)$ für alle $x \in X$ gilt, nicht jedoch in Beispiel (b). Aussage (a) aus Lemma VII.4.5 kann so interpretiert werden, daß „im Mittel“ $T_t x$ stets in $\mathrm{dom}(A)$ liegt; im Kontext von Beispiel (b) sieht man erneut die glättende Wirkung der Integration.

Satz VII.4.6 *Der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist dicht definiert und abgeschlossen.*

Beweis. Sei A der Erzeuger von (T_t). Zu $x \in X$ und $t > 0$ betrachte $x_t := \frac{1}{t}\int_0^t T_s x\,ds$. Dann ist nach Lemma VII.4.5(a) $x_t \in \mathrm{dom}(A)$, und es gilt nach (VII.29) $\lim_{t\to 0} x_t = x$. Deshalb ist A dicht definiert.

Zum Beweis der Abgeschlossenheit von A betrachte eine Folge (x_n) in $\mathrm{dom}(A)$ mit $x_n \to x$, $Ax_n \to y \in X$. Es ist $x \in \mathrm{dom}(A)$ und $Ax = y$ zu zeigen. Das folgt aus

$$\begin{aligned}
\frac{T_h x - x}{h} &= \lim_{n\to\infty} \frac{T_h x_n - x_n}{h} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h T_s A x_n\,ds \qquad \text{(Lemma VII.4.5(d))} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h T_s y\,ds \\
&\qquad \text{(da } T_s A x_n \to T_s y \text{ gleichmäßig in } s \in [0,t]) \\
&\to y
\end{aligned}$$

mit $h \to 0$. □

Lemma VII.4.5 liefert Informationen über die Lösungen eines abstrakten Cauchyproblems

$$u' = Au, \quad u(0) = x_0. \tag{VII.31}$$

Satz VII.4.7 *Es sei A der Erzeuger der C_0-Halbgruppe (T_t) auf einem Banachraum X, und es sei $x_0 \in \mathrm{dom}(A)$. Dann ist die Funktion $u\colon [0,\infty) \to X$, $u(t) = T_t x_0$, stetig differenzierbar, $\mathrm{dom}(A)$-wertig und eine Lösung von (VII.31). Ferner ist u die einzige Lösung von (VII.31) mit diesen Eigenschaften, und $u(t)$ hängt stetig vom Anfangswert x_0 ab.*

Beweis. Nach Lemma VII.4.5(b) ist $T_t x_0 \in \mathrm{dom}(A)$ für alle $t > 0$, also ist $A(u(t))$ wohldefiniert. Für die rechtsseitige Ableitung von u gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T_{t+h}x_0 - T_t x_0}{h} = \lim_{h\to 0^+} T_t\Big(\frac{T_h x_0 - x_0}{h}\Big) \\
&= T_t A x_0 = A T_t x_0 = A(u(t))
\end{aligned}$$

und für die linksseitige ebenfalls

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{u(t-h) - u(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} T_{t-h}\frac{T_h x_0 - x_0}{h} = T_t A x_0 = A(u(t)).$$

Im vorletzten Schritt geht ein, daß wegen $\sup_{s\le t}\|T_s\|<\infty$ die T_{t-h} gleichgradig stetig sind; mit der Abkürzung $A_h=\frac{1}{h}(T_h-\mathrm{Id})$ lautet die Abschätzung explizit

$$\begin{aligned}\|T_{t-h}A_hx_0-T_tAx_0\| &\le \|T_{t-h}A_hx_0-T_{t-h}Ax_0\|+\|T_{t-h}Ax_0-T_tAx_0\|\\ &\le \|T_{t-h}\|\,\|A_hx_0-Ax_0\|+\|T_{t-h}Ax_0-T_tAx_0\|\\ &\to 0\end{aligned}$$

nach Definition von A sowie Lemma VII.4.3. Außerdem zeigt dieses Lemma wegen $u'(t)=AT_tx_0=T_tAx_0$, daß u' stetig ist.

Sei nun v eine weitere Lösung von (VII.31). Dann liefert die „Produktregel“ der Differentiation (Beweis wie in der Analysis) für $0\le t\le s$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T_{s-t}v(t) &= (-1)AT_{s-t}v(t)+T_{s-t}v'(t) \qquad \Big(\text{denn } \frac{d}{d\tau}T_\tau x=AT_\tau x\Big)\\ &= -T_{s-t}Av(t)+T_{s-t}Av(t) \;=\; 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Konstanz der Funktion $\Phi\colon [0,s]\to X$, $\Phi(t)=T_{s-t}v(t)$; denn für alle Funktionale $\ell\in X'$ ist

$$\frac{d}{dt}(\ell\circ\Phi)=\ell\circ\frac{d\Phi}{dt}=0,$$

so daß $\ell(\Phi(0))=\ell(\Phi(t))$ für alle $t\in[0,s]$, insbesondere für $t=s$. Der Satz von Hahn-Banach impliziert $\Phi(0)=\Phi(s)$, d.h. $T_sx_0=v(s)$. Da s beliebig war, ist die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

Die stetige Abhängigkeit von $u(t)$ von x_0 ist nichts anderes als die Stetigkeit der Operatoren T_t. □

Korollar VII.4.8 *Zwei C_0-Halbgruppen mit demselben Erzeuger stimmen überein.*

Beweis. Haben (S_t) und (T_t) denselben Erzeuger A, so lösen sowohl $t\mapsto S_tx$ als auch $t\mapsto T_tx$ das Anfangswertproblem

$$u'(t)=Au(t),\quad u(0)=x\in\mathrm{dom}(A).$$

Die eindeutige Lösbarkeit impliziert $S_t|_{\mathrm{dom}(A)}=T_t|_{\mathrm{dom}(A)}$ für alle $t\ge 0$ und, da die S_t und T_t stetig sind und $\mathrm{dom}(A)$ dicht liegt (Satz VII.4.6), $S_t=T_t$. □

Will man Satz VII.4.7 auf ein konkretes Cauchyproblem mit einem gegebenen Differentialoperator A anwenden, benötigt man Kriterien, mit deren Hilfe man einem abgeschlossenen Operator ansehen kann, ob er eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Solche Kriterien werden im folgenden hergeleitet.

Wir behandeln zuerst den Fall normstetiger Halbgruppen. Bei einer normstetigen Halbgruppe (T_t) ist die Abbildung $t \mapsto T_t$ bzgl. der Operatornorm stetig, wie aus der für $0 \le s \le t \le t_0$ gültigen Abschätzung

$$\|T_t - T_s\| = \|T_s(T_{t-s} - \mathrm{Id})\| \le \|T_s\| \, \|T_{t-s} - \mathrm{Id}\| \le C\|T_{t-s} - \mathrm{Id}\|$$

folgt. Daher konvergiert das Riemannintegral $\int_0^t T_s \, ds$ in der Operatornorm, und wir können die Operatoren

$$M_t = \frac{1}{t} \int_0^t T_s \, ds \qquad (t > 0) \tag{VII.32}$$

definieren. Da $T \mapsto Tx$ ein stetiger linearer Operator von $L(X)$ nach X ist, gilt

$$M_t x = \frac{1}{t} \int_0^t T_s x \, ds \qquad \forall x \in X.$$

Satz VII.4.9 *Für eine C_0-Halbgruppe (T_t) mit Erzeuger A sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *(T_t) ist normstetig.*

(ii) *A ist stetig.*

(iii) $\mathrm{dom}(A) = X$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, gilt $T_t = e^{tA}$ für alle $t \ge 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iii): Wir verwenden die obige Notation. Ist (T_t) normstetig, folgt aus (VII.29) $\|M_t - \mathrm{Id}\| \to 0$, denn $t \mapsto T_t$ ist stetig. Für hinreichend kleines τ ist deshalb M_τ invertierbar und insbesondere surjektiv (Neumannsche Reihe, Satz II.1.11). Nun ist nach Lemma VII.4.5(a) $\mathrm{ran}(M_\tau) \subset \mathrm{dom}(A)$; folglich ist $\mathrm{dom}(A) = X$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Da A nach Satz VII.4.6 abgeschlossen ist, folgt diese Implikation aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Betrachte die Halbgruppe $S_t = e^{tA}$; nach Beispiel (a) ist (S_t) normstetig und hat A als Erzeuger. Wegen Korollar VII.4.8 ist $T_t = e^{tA}$, und damit ist auch der Zusatz gezeigt. $\square$

Beachte, daß die Äquivalenz von (ii) und (iii) für jeden dicht definierten abgeschlossenen Operator in einem Banachraum gültig ist.

Um den fundamentalen Satz von Hille-Yosida über die Erzeugung von C_0-Halbgruppen zu formulieren, benötigen wir Grundbegriffe der Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren in einem Banachraum. Diese sind vollkommen analog zu denen aus Definition VII.2.14 für Hilbertraum-Operatoren; auch Satz VII.2.15 gilt entsprechend.

Wir wenden uns als erstes den Kontraktionshalbgruppen zu, also den C_0-Halbgruppen mit $\|T_t\| \le 1$ für alle $t \ge 0$.

Satz VII.4.10 *Sei A der Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe (T_t).*

(a) $\{\lambda\colon\ \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$.

(b) $(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x\, ds$ *für alle λ mit* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

(c) $\|(\operatorname{Re}\lambda)(\lambda - A)^{-1}\| \le 1$ *für alle λ mit* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Beweis. Sei $\operatorname{Re}\lambda > 0$; dann ist $\lim_{t\to\infty} \|e^{-\lambda t}T_t\| = 0$, da $\|T_t\| \le 1$. Wendet man Lemma VII.4.5 auf die Halbgruppe $(e^{-\lambda t}T_t)$ an, die den Erzeuger $A-\lambda$ mit Definitionsbereich $\operatorname{dom}(A)$ hat, folgt

$$e^{-\lambda t}T_t x - x = \begin{cases} (A-\lambda)\displaystyle\int_0^t e^{-\lambda s} T_s x\, ds & \forall x \in X, \\ \displaystyle\int_0^t e^{-\lambda s} T_s (A-\lambda) x\, ds & \forall x \in \operatorname{dom}(A). \end{cases}$$

Der Grenzübergang $t \to \infty$ liefert

$$x = \begin{cases} (\lambda - A)\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x\, ds & \forall x \in X, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s (\lambda - A) x\, ds & \forall x \in \operatorname{dom}(A). \end{cases}$$

Daher ist $\lambda - A\colon \operatorname{dom}(A) \to X$ bijektiv und $\lambda \in \rho(A)$, und der inverse Operator hat die in (b) angegebene Gestalt. Schließlich folgt (c) aus

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\| \le \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda s} \|T_s\|\, \|x\|\, ds \le \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda s}\, ds \cdot \|x\| = \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}\lambda}. \quad \square$$

Teil (b) kann man so deuten, daß die Resolvente von A die Laplacetransformation der Halbgruppe ist.

Wir kommen zum ersten Hauptergebnis, wonach die Umkehrung von Satz VII.4.10 ebenfalls richtig ist.

Theorem VII.4.11 (Satz von Hille-Yosida für Kontraktionshalbgruppen) *Ein Operator A ist genau dann Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe, wenn A dicht definiert und abgeschlossen ist, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ gilt und*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \le 1 \qquad \forall \lambda > 0. \tag{VII.33}$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen wurde in Satz VII.4.6 und Satz VII.4.10 bewiesen. Der Beweis der Umkehrung nach Yosida beruht auf folgender Idee: Definiere für $\lambda > 0$ beschränkte Operatoren A_λ und die zugehörigen Halbgruppen (e^{tA_λ}); dann zeige, daß $T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x$ existiert und eine Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger A definiert.

Für $\lambda > 0$ definieren wir also die *Yosida-Approximation*

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda \in L(X)$$

und die zugehörige normstetige Halbgruppe (e^{tA_λ}); beachte

$$A_\lambda x = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(A).$$

Die Operatoren e^{tA_λ} sind kontraktiv wegen

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2(\lambda-A)^{-1}t}\| \leq e^{-\lambda t}e^{\|\lambda^2(\lambda-A)^{-1}\|t} \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = 1;$$

im zweiten Schritt wurde die für einen beschränkten Operator S gültige Abschätzung

$$\|e^S\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|S\|^n}{n!} = e^{\|S\|}$$

und im vorletzten die Voraussetzung (VII.33) benutzt.

Wir möchten nun das Verhalten von $A_\lambda x$ und $e^{tA_\lambda}x$ für $\lambda \to \infty$ untersuchen. Dazu wird zuerst

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(A) \tag{VII.34}$$

gezeigt. Ist nämlich $y \in \operatorname{dom}(A)$, so erhält man

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}y = \lim_{\lambda\to\infty}(y + A(\lambda - A)^{-1}y) = y, \tag{VII.35}$$

denn

$$\|A(\lambda - A)^{-1}y\| = \|(\lambda - A)^{-1}Ay\| \leq \frac{\|Ay\|}{\lambda} \to 0$$

mit $\lambda \to \infty$ wegen (VII.33). Nun ist nach Voraussetzung die Familie der Operatoren $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ beschränkt, so daß (VII.35) sogar für alle $y \in X$ gilt. Setzt man speziell $y = Ax$ ein, erhält man (VII.34).

Seien jetzt $x \in X$ und $t \geq 0$. Wir zeigen, daß $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ existiert, und beweisen dazu die Cauchy-Eigenschaft. Wir gehen aus von

$$\frac{d}{ds}e^{s(A_\lambda - A_\mu)}x = e^{s(A_\lambda - A_\mu)}(A_\lambda - A_\mu)x,$$

integrieren von 0 bis t und wenden dann e^{tA_μ} an; das liefert

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^t e^{sA_\lambda}e^{(t-s)A_\mu}(A_\lambda - A_\mu)x\,ds.$$

Hier ist zu beachten, daß für kommutierende beschränkte Operatoren S und T auch e^S, e^T, S und T kommutieren und daß $e^{S+T} = e^S e^T$ gilt (Aufgabe VII.5.29). Man erhält jetzt für $x \in \operatorname{dom}(A)$

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \int_0^t \|e^{sA_\lambda}\|\,\|e^{(t-s)A_\mu}\|\,\|A_\lambda x - A_\mu x\|\,ds \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \;\to\; 0\end{aligned}$$

mit $\lambda, \mu \to \infty$ wegen (VII.34). Aber da stets $\|e^{tA_\lambda}\| \le 1$ gilt, schließen wir, daß $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ sogar für alle $x \in X$ und nicht bloß auf $\mathrm{dom}(A)$ existiert; beachte außerdem, daß die Konvergenz gleichmäßig auf beschränkten t-Intervallen ist. Für jedes $t \ge 0$ und jedes $x \in X$ kann man daher

$$T_t x := \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \tag{VII.36}$$

definieren. Dann sind die T_t stetige Operatoren mit Norm ≤ 1, da die e^{tA_λ} es sind. Der nächste Schritt ist zu zeigen, daß $(T_t)_{t\ge 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist. Hier sind die Forderungen (1) und (2) aus Definition VII.4.1 klar, und die starke Stetigkeit ergibt sich aus der gleichmäßigen Konvergenz in (VII.36) auf beschränkten Intervallen.

Schließlich ist A als der Erzeuger von (T_t) zu identifizieren, der einstweilen mit B bezeichnet sei. Wir behaupten zuerst

$$\mathrm{dom}(A) \subset \mathrm{dom}(B), \quad Bx = Ax \text{ für } x \in \mathrm{dom}(A). \tag{VII.37}$$

Für $x \in \mathrm{dom}(A)$ zeigt Lemma VII.4.5 nämlich

$$T_t x - x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x - x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x\, ds = \int_0^t T_s Ax\, ds,$$

denn

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x\, ds - \int_0^t T_s Ax\, ds \right\| \;\le\; & \int_0^t \|e^{sA_\lambda}\|\, \|A_\lambda x - Ax\|\, ds \\ & + \int_0^t \|e^{sA_\lambda}Ax - T_s Ax\|\, ds,\end{aligned}$$

und das erste Integral strebt nach (VII.34) mit $\lambda \to \infty$ gegen 0 und das zweite wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Integranden.

Andererseits ist $1 \in \rho(A)$ nach Voraussetzung und $1 \in \rho(B)$ nach Satz VII.4.10. Wegen (VII.37) ist $x = (\mathrm{Id} - B)(\mathrm{Id} - A)^{-1}x$ für alle $x \in X$, so daß auch $(\mathrm{Id} - B)^{-1}x = (\mathrm{Id} - A)^{-1}x$ für alle x gilt, und das zeigt $\mathrm{dom}(B) = \mathrm{dom}(A)$.

Damit ist der Satz von Hille-Yosida bewiesen. □

Das nächste Ziel wird sein, den Satz von Hille-Yosida auf beliebige C_0-Halbgruppen auszudehnen. Dazu wird eine Umnormierungstechnik verwandt; beachte, daß die starke Stetigkeit einer Halbgruppe, also Forderung (3) aus Definition VII.4.1, bei Übergang zu einer äquivalenten Norm erhalten bleibt, und auch der Erzeuger ändert sich dabei nicht.

Hier ist als erstes die notwendige Spektralbedingung an den Erzeuger einer C_0-Halbgruppe, die sich in Theorem VII.4.13 auch als hinreichend erweisen wird.

Satz VII.4.12 *Sei (T_t) eine C_0-Halbgruppe mit $\|T_t\| \le Me^{\omega t}$ für alle $t \ge 0$ und A ihr Erzeuger. Dann gelten*

(a) $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$,

(b) $(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x\, ds$ *für alle* λ *mit* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$,

(c) $\|(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \le M$ *für alle* λ *mit* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Spezialfall $\omega = 0$, so daß stets $\|T_t\| \le M$ vorausgesetzt ist. Der Ausdruck

$$|||x||| = \sup_{t \ge 0} \|T_t x\|$$

definiert eine Norm, die wegen $\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|$ zur ursprünglichen Norm äquivalent ist. Die zugehörige Operatornorm bezeichnen wir ebenfalls mit diesem Symbol, also $|||S||| = \sup_{|||x||| \le 1} |||Sx|||$. In der neuen Norm ist (T_t) eine Kontraktionshalbgruppe, denn

$$|||T_t x||| = \sup_{\tau \ge 0} \|T_{\tau + t} x\| \le |||x|||.$$

Satz VII.4.10 impliziert daher $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ und

$$|||(\operatorname{Re}\lambda)^n (\lambda - A)^{-n}||| \le |||(\operatorname{Re}\lambda)(\lambda - A)^{-1}|||^n \le 1$$

für alle $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, und Satz VII.4.12 ist in diesem Spezialfall gezeigt, denn $\|S\| \le M|||S|||$ für alle $S \in L(X)$.

Im allgemeinen Fall gehen wir zur Halbgruppe $S_t = e^{-\omega t} T_t$ mit dem Erzeuger $A - \omega$ über, für die $\|S_t\| \le M$ für alle $t \ge 0$ gilt. Nach dem bereits Bewiesenen ist $\{\mu\colon \operatorname{Re}\mu > 0\} \subset \rho(A - \omega) = \{\lambda - \omega\colon \lambda \in \rho(A)\}$ und $\|(\operatorname{Re}\mu)^n (\mu - (\omega - A))^{-n}\| \le M$ für alle $\operatorname{Re}\mu > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Schreibt man $\mu = \lambda - \omega$, so liefert das sofort die Behauptung. Der Beweis der Formel für die Resolvente ist wie in Satz VII.4.10. □

Wir kommen zur Umkehrung.

Theorem VII.4.13 (Satz von Hille-Yosida im allgemeinen Fall)
Ein Operator A ist genau dann Erzeuger einer C_0-Halbgruppe, wenn er dicht definiert und abgeschlossen ist und Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$, $M \ge 1$ existieren, so daß $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und

$$\|(\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \le M \qquad \forall \lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}. \tag{VII.38}$$

In diesem Fall erfüllt die erzeugte Halbgruppe die Abschätzung $\|T_t\| \le Me^{\omega t}$ für alle $t \ge 0$.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen wurde gerade in Satz VII.4.12 bewiesen. Die Hinlänglichkeit wird wieder zuerst im Spezialfall $\omega = 0$ untersucht. Die Idee für den Beweis ist, durch eine geschickte Umnormierung (VII.38) in (VII.33) zu überführen und dann Theorem VII.4.11 anzuwenden.

Wir führen zuerst zu jedem $\mu > 0$ die durch

$$\|x\|_\mu = \sup_{n\geq 0} \|\mu^n(\mu - A)^{-n}x\|$$

definierte Norm $\|\,.\,\|_\mu$ auf X ein. Dies ist eine äquivalente Norm, denn (VII.38) liefert

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|; \tag{VII.39}$$

außerdem gilt nach Konstruktion

$$\|\mu(\mu - A)^{-1}\|_\mu \leq 1. \tag{VII.40}$$

Wir werden zeigen, daß $\|x\|_\mu$ mit μ monoton wächst. Dazu wird als erstes

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_\mu \leq 1 \qquad \forall 0 < \lambda \leq \mu \tag{VII.41}$$

behauptet; das ergibt sich folgendermaßen aus der Resolventengleichung (vgl. Satz VII.2.15(b)):

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - A)^{-1}\|_\mu &= \|(\mu - A)^{-1} + (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}\|_\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|(\lambda - A)^{-1}\|_\mu \qquad \text{(nach (VII.40))} \\
&= \|(\lambda - A)^{-1}\|_\mu + \frac{1}{\mu}\big(1 - \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_\mu\big).
\end{aligned}$$

Weiter hat man für $0 < \lambda \leq \mu$ und $n \in \mathbb{N}$ wg. (VII.39) und (VII.41)

$$\|\lambda^n(\lambda - A)^{-n}x\| \leq \|\lambda^n(\lambda - A)^{-n}x\|_\mu \leq \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_\mu^n \, \|x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

und daher

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu \qquad \forall 0 < \lambda \leq \mu.$$

Wir können deshalb die äquivalente Norm

$$|||x||| = \lim_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu$$

einführen, die ebenfalls

$$\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \tag{VII.42}$$

erfüllt. (VII.41) liefert $|||\lambda(\lambda - A)^{-1}||| \leq 1$, also die Hille-Yosida-Bedingung (VII.33); man lasse nämlich in

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

$\mu \to \infty$ streben.

Theorem VII.4.11 garantiert jetzt, daß A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe mit $|||T_t||| \leq 1$ ist; (VII.42) liefert $\|T_t x\| \leq |||T_t x||| \leq |||x||| \leq M\|x\|$, also $\|T_t\| \leq M$, und Theorem VII.4.13 ist im Fall $\omega = 0$ gezeigt.

Im Fall eines beliebigen ω betrachten wir $B = A - \omega$. Nach dem gerade Bewiesenen erzeugt B eine C_0-Halbgruppe mit $\|S_t\| \leq M$. Der Operator A erzeugt dann die Halbgruppe $T_t = e^{\omega t} S_t$, und die erfüllt $\|T_t\| \leq M e^{\omega t}$.

Damit ist das Theorem vollständig bewiesen. □

Die Bedingungen im Satz von Hille-Yosida können so verstanden werden, daß die in einem geeigneten Sinn „nach oben beschränkten" Operatoren C_0-Halbgruppen erzeugen und „negative" Operatoren Kontraktionshalbgruppen.

Obwohl die Theoreme VII.4.11 und VII.4.13 in theoretischer Hinsicht sehr befriedigend sind, sind sie in der Praxis häufig schwierig anzuwenden, da man eine explizite Kenntnis der Resolvente benötigt. Deshalb soll jetzt ein praktikableres Kriterium aufgestellt werden. Die dabei auftauchenden dissipativen Operatoren können als Analoga der negativen selbstadjungierten Operatoren im Kontext eines Banachraums verstanden werden.

Definition VII.4.14

(a) Die *Dualitätsabbildung* auf einem Banachraum X ist die mengenwertige Abbildung $J\colon X \to \mathfrak{P}(X')$ mit

$$J(x) = \{x'\colon \|x'\| = \|x\| \text{ und } x'(x) = \|x\|^2\}.$$

(b) Ein linearer Operator A in X heißt *dissipativ*, falls

$$\forall x \in \operatorname{dom}(A)\ \exists x' \in J(x) \quad \operatorname{Re} x'(Ax) \leq 0. \tag{VII.43}$$

(c) Ein linearer Operator A in X heißt *akkretiv*, falls $-A$ dissipativ ist.

Nach dem Satz von Hahn-Banach ist stets $J(x) \neq \emptyset$. Im Fall eines Hilbertraums H, wo H' wie üblich mit H identifiziert wird, ist $J(x) = \{x\}$, und ein Operator ist genau dann dissipativ, wenn $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$ auf $\operatorname{dom}(A)$ gilt. Insbesondere trifft das auf selbstadjungierte Operatoren mit negativem Spektrum zu (vgl. Aufgabe VII.5.23).

Auch für $X = L^p$ mit $1 < p < \infty$ ist $J(f) \subset L^q \cong (L^p)'$ stets einelementig, nämlich $J(f) = \{g\}$ mit $g(\omega) = \|f\|_p^{2-p} \overline{f(\omega)} |f(\omega)|^{p-2}$ bzw. $g(\omega) = 0$ für $f(\omega) = 0$. Für $p = 1$ oder $p = \infty$ sowie $X = C[0,1]$ ist J i.a. tatsächlich mengenwertig; für $X = C[0,1]$ ist z.B. $J(\mathbf{1})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[0,1]$.

Beispiel. Sei $X = C_0(\mathbb{R}^d)$, und betrachte den Laplaceoperator mit dem Definitionsbereich $\operatorname{dom}(\Delta) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist Δ dissipativ: Zu $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

existiert eine Stelle x_0, so daß $\|\varphi\|_\infty = |\varphi(x_0)|$. Setze $\alpha = \overline{\varphi(x_0)}$ und betrachte das Funktional $\ell = \alpha\delta_{x_0}$. Dann ist $\ell \in J(\varphi)$ klar, und weiter gilt

$$\operatorname{Re}\ell(\Delta\varphi) = \operatorname{Re}\alpha(\Delta\varphi)(x_0) \leq 0,$$

denn die reellwertige Funktion $\psi = \operatorname{Re}\alpha\varphi$ nimmt bei x_0 ihr Maximum an, und dann müssen bei x_0 alle $\partial^2\psi/\partial x_j^2 \leq 0$ sein.

Satz VII.4.15 *Ein linearer Operator A ist genau dann dissipativ, wenn*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\| \qquad \forall\lambda > 0,\ x \in \operatorname{dom}(A). \tag{VII.44}$$

Beweis. Sei A dissipativ. Zu $x \in \operatorname{dom}(A)$ wähle $x' \in J(x)$ mit $\operatorname{Re}x'(Ax) \leq 0$; für alle $\lambda > 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)x\|\,\|x'\| \ &\geq\ |x'\big((\lambda - A)x\big)| \ \geq\ \operatorname{Re}x'\big((\lambda - A)x\big) \\ &\geq\ \lambda\operatorname{Re}x'(x) \ =\ \lambda\|x\|^2, \end{aligned}$$

was wegen $\|x'\| = \|x\|$ (VII.44) ergibt.

Umgekehrt sei (VII.44) vorausgesetzt. Zu $x \in \operatorname{dom}(A)$ und $\lambda > 0$ sei ein beliebiges $x'_\lambda \in J(\lambda x - Ax)$ gewählt. Für $y'_\lambda = x'_\lambda/\|x'_\lambda\|$ gilt dann nach (VII.44) bzw. nach Wahl von x'_λ

$$\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = y'_\lambda(\lambda x - Ax) = \lambda\operatorname{Re}y'_\lambda(x) - \operatorname{Re}y'_\lambda(Ax).$$

Daraus folgen die beiden Ungleichungen

$$\|x\| \leq \operatorname{Re}y'_\lambda(x) + \frac{\|Ax\|}{\lambda}, \qquad \operatorname{Re}y'_\lambda(Ax) \leq 0.$$

Sei $E = \operatorname{lin}\{x, Ax\} \subset X$ und $z'_n = y'_n|_E$. Dann besitzt die beschränkte Folge (z'_n) des endlichdimensionalen Raums E' einen Häufungspunkt z'; sei $y' \in X'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von z'. (Leserinnen und Leser, die mit dem Satz von Alaoglu aus dem nächsten Kapitel (Korollar VIII.3.12) bereits vertraut sind, können an dieser Stelle einfach einen Schwach*-Häufungspunkt y' der y'_n, $n \in \mathbb{N}$, wählen.) Auf jeden Fall folgt damit $\|y'\| \leq 1$, $\|x\| \leq \operatorname{Re}y'(x)$, $\operatorname{Re}y'(Ax) \leq 0$, so daß $x' := \|x\|y' \in J(x)$ und $\operatorname{Re}x'(Ax) \leq 0$. □

Jetzt können wir eine weitere Charakterisierung der Erzeuger von Kontraktionshalbgruppen beweisen.

Theorem VII.4.16 (Satz von Lumer-Phillips)
Sei A ein dicht definierter linearer Operator in einem Banachraum X. Genau dann erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe, wenn A dissipativ ist und $\lambda_0 - A$ für ein $\lambda_0 > 0$ surjektiv ist.

Beweis. Erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe, so gilt $(0,\infty) \subset \rho(A)$, und die Hille-Yosida-Bedingung (VII.33) impliziert sofort (VII.44), so daß A dissipativ ist.

Umgekehrt sei A dissipativ und $\lambda_0 - A$ surjektiv. Aus (VII.44) folgt, daß $\lambda_0 - A$ auch injektiv mit stetiger Inverser ist. Insbesondere ist $(\lambda_0 - A)^{-1}$ abgeschlossen und deshalb auch $\lambda_0 - A$ sowie A, vgl. Aufgabe IV.7.15.

Wenn gezeigt werden kann, daß *alle* $\lambda - A$ für $\lambda > 0$ surjektiv sind, so zeigt die obige Überlegung $(0,\infty) \subset \rho(A)$, und da (VII.44) für den dissipativen Operator A (VII.33) impliziert, ist der abgeschlossene Operator A nach dem Satz von Hille-Yosida Erzeuger einer kontraktiven Halbgruppe. Wir betrachten daher

$$\Lambda = \{\lambda \in (0,\infty)\colon \lambda - A \text{ ist surjektiv}\} = (0,\infty) \cap \rho(A).$$

Offensichtlich ist Λ eine offene Teilmenge von $(0,\infty)$ und $\neq \emptyset$, denn $\lambda_0 \in \Lambda$. Wir werden zeigen, daß Λ in der Relativtopologie von $(0,\infty)$ auch abgeschlossen ist, was, wie gewünscht, $\Lambda = (0,\infty)$ liefert.

Sei also (λ_n) eine Folge in Λ mit $\lambda_n \to \lambda \in (0,\infty)$. Wegen (VII.44) folgt mit Aufgabe VII.4.1, deren Aussage auch für unbeschränkte Operatoren gilt, daß

$$\operatorname{dist}\bigl(\lambda_n, \sigma(A)\bigr) \geq \frac{1}{\|(\lambda_n - A)^{-1}\|} \geq \lambda_n$$

und daher auch

$$\operatorname{dist}\bigl(\lambda, \sigma(A)\bigr) \geq \lambda > 0,$$

d.h. $\lambda \in \rho(A)$. □

Als *Beispiel* behandeln wir ein einfaches Anfangsrandwertproblem:

$$\left.\begin{array}{rcll} v_t &=& v_{xx} & \text{für } t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1, \\ v(0,x) &=& f_0(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ v(t,0) = v(t,1) &=& 0 & \text{für } t \geq 0. \end{array}\right\} \qquad \text{(VII.45)}$$

Dieses Problem übersetzen wir in ein abstraktes Cauchyproblem wie folgt: Setze $X = \{f \in C[0,1]\colon f(0) = f(1) = 0\}$ mit der Supremumsnorm, $Af = f''$ mit $\operatorname{dom}(A) = \{f \in C^2[0,1] \cap X\colon f'' \in X\}$ und $\bigl(u(t)\bigr)(x) = v(t,x)$. Statt eine skalarwertige Lösung v von (VII.45) zu bestimmen, versucht man, eine vektorwertige Lösung $u\colon [0,\infty) \to X$ von

$$u' = Au, \quad u(0) = f_0 \qquad \text{(VII.46)}$$

zu finden. Eine solche Lösung existiert nach Satz VII.4.7, wenn A eine C_0-Halbgruppe auf X erzeugt und $f_0 \in \operatorname{dom}(A)$. Ersteres folgt aus dem Satz von Lumer-Phillips: Zunächst ist es nicht schwierig zu zeigen, daß A abgeschlossen und dicht definiert ist; die Technik aus Lemma V.1.9 zeigt nämlich, daß $\mathscr{D}(0,1)$ dicht in X liegt. Die Dissipativität von A folgt wie im obigen Beispiel des Laplaceoperators. Schließlich ist $\mathrm{Id} - A$ surjektiv; diese Aussage ist dazu äquivalent, daß für jedes $g \in X$ das Randwertproblem $f - f'' = g$, $f(0) = f(1) = 0$, eindeutig lösbar ist. Das ist jedoch ein bekannter Satz aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe z.B. Walter [1993], S. 219).

Dies ist natürlich nur die Spitze des Eisbergs; auch wesentlich allgemeinere Anfangsrandwertprobleme für gleichmäßig stark elliptische Differentialoperatoren in L^p können mit Halbgruppenmethoden gelöst werden, siehe etwa Pazy [1983].

VII.5 Aufgaben

Es bezeichne H stets einen komplexen Hilbertraum und X einen komplexen Banachraum.

Aufgabe VII.5.23 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ dicht definiert. Der *numerische Wertebereich* von T ist

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle\colon x \in \mathrm{dom}(T), \|x\| = 1\}.$$

(a) Ist $\lambda \notin \overline{W(T)}$, so gilt

$$0 < \mathrm{dist}(\lambda, W(T)) \le \|(\lambda - T)x\| \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(T), \|x\| = 1.$$

(b) Ist $\lambda \notin \overline{W(T)}$ und $\lambda \in \rho(T)$, so gilt

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \le \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, W(T))}.$$

(c) Ist T selbstadjungiert, so gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$ sowie $\inf \sigma(T) = \inf W(T)$, $\sup \sigma(T) = \sup W(T)$.
(Tip: Ist $\inf \sigma(T) = 0$, zeige $\langle (\lambda - T)^{-1} y, y\rangle \le 0$ für $\lambda < 0$; setze dann $y = (\lambda - T)x$ und lasse $\lambda \to 0$ streben.)

Aufgabe VII.5.24 Sei (T_t) eine Familie stetiger linearer Operatoren auf einem Banachraum, die (2) bzw. (2) und (3) aus Definition VII.4.1 erfüllt. Gilt dann auch (1)?

Aufgabe VII.5.25 Zeige, daß die Wärmeleitungshalbgruppe (siehe (VII.20)) eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R}^d)$ ist.

Aufgabe VII.5.26 Sei $q\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte stetige Funktion. Betrachte die Operatoren $(T_t f)(x) = e^{tq(x)} f(x)$ auf $C_0(\mathbb{R}^d)$ oder $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$. Zeige, daß (T_t) eine C_0-Halbgruppe ist. Was ist ihr Erzeuger? Wann erhält man auch für $p = \infty$ eine C_0-Halbgruppe?

Aufgabe VII.5.27 Sei $X = \{f \in C[0,1]\colon f(1) = 0\}$, und die Operatoren T_t: $X \to X$ seien durch $(T_t f)(x) = f(x+t)$ für $0 \le x+t \le 1$ und $(T_t f)(x) = 0$ sonst erklärt. Zeige, daß $(T_t)_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X ist, und bestimme ihren Erzeuger sowie ihre Wachstumsschranke.

Aufgabe VII.5.28 Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der Summennorm, $A(x_1,x_2) = (x_2,0)$ und $T_t = e^{tA}$. Bestimme die Wachstumsschranke von (T_t). Wird das Infimum in (VII.25) angenommen?

Aufgabe VII.5.29 Seien $S,T \in L(X)$ kommutierende Operatoren. Dann gilt $e^{S+T} = e^S e^T$.

Aufgabe VII.5.30 Betrachte die Operatoren $Af = f'''$ und $Bf = f''' - f''$ jeweils mit dem Definitionsbereich $W^3(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe, B jedoch nicht.
(Tip: Fouriertransformation!)

Aufgabe VII.5.31 Sei $A\colon X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ein dicht definierter Operator mit $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann ist A abgeschlossen.

Aufgabe VII.5.32 Sei $A\colon X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ein dicht definierter dissipativer Operator mit $(0,\infty) \cap \rho(A) \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\forall x \in \mathrm{dom}(A)\ \forall x' \in J(x) \quad \mathrm{Re}\, x'(Ax) \le 0.$$

Aufgabe VII.5.33 Ein Operator $A\colon X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ heißt *abschließbar*, falls A eine abgeschlossene Erweiterung besitzt.

(a) A ist genau dann abschließbar, wenn aus $x_n \to 0$, (Ax_n) Cauchyfolge auch $Ax_n \to 0$ folgt.
(b) Ist A abschließbar, so ist der Abschluß des Graphen $\mathrm{gr}(A) \subset X \oplus X$ der Graph eines abgeschlossenen Operators $\overline{A}$. $\overline{A}$ heißt die *Abschließung* von A und ist offenbar die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A.
(c) Gib ein Beispiel eines nicht abschließbaren Operators.

Aufgabe VII.5.34 Ein *determinierender* oder *wesentlicher Bereich* (engl. *core*) eines dicht definierten abgeschlossenen Operators $A\colon X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ist ein Untervektorraum $D \subset \mathrm{dom}(A)$, der bzgl. der Graphennorm $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ dicht in $\mathrm{dom}(A)$ liegt. Zeige, daß D genau dann ein determinierender Bereich für A ist, wenn A die Abschließung von $A|_D$ ist. Ist $\lambda \in \rho(A)$, trifft das genau dann zu, wenn $(\lambda - A)(D)$ dicht in X liegt.

Aufgabe VII.5.35 Sei $A\colon X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ein dicht definierter dissipativer Operator.

(a) Dann ist A abschließbar, und $\overline{A}$ ist ebenfalls dissipativ.
(b) Hat für ein $\lambda_0 > 0$ der Operator $\lambda_0 - A$ dichtes Bild, so ist $\lambda_0 - \overline{A}$ surjektiv, und $\overline{A}$ ist der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe.

Aufgabe VII.5.36 Hat ein Banachraum einen strikt konvexen Dualraum (siehe Aufgabe I.4.13), so ist die Dualitätsabbildung stets einelementig.

Aufgabe VII.5.37 Sei $X = C[0,1]$ und $Af = f''$ mit dem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(A) = \{f \in C^2[0,1]\colon f'(0) = f'(1) = 0\}$. Dann erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe auf X.

Aufgabe VII.5.38 (Operatorgruppen)

(a) Sei $A\colon H \supset \mathrm{dom}(A) \to H$ selbstadjungiert. Sei $T_t := e^{itA}$ gemäß (VII.16) definiert. Dann ist $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von unitären Operatoren, d.h. es ist $T_{s+t} = T_s T_t$ für $s, t \in \mathbb{R}$, für die
$$\lim_{t\to 0} T_t x = x \qquad \forall x \in H$$
gilt. (Wegen dieser Eigenschaft nennt man (T_t) wieder *stark stetig.*) Ferner ist
$$\lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t} = iAx \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(A).$$
(Tip: Analysiere zuerst den Fall $A = M_f$.)

(b) Ist A ein stetiger selbstadjungierter Operator, so gilt sogar
$$\lim_{t\to 0} \|T_t - \mathrm{Id}\| = 0.$$

(c) Sei A die selbstadjungierte Erweiterung von $i\frac{d}{dt}$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (siehe Aufgabe VII.4.20). Was sind in diesem Fall die T_t?

(d) (Satz von Stone)
Jede stark stetige Gruppe unitärer Operatoren kann als $\{e^{itA}\colon t \in \mathbb{R}\}$ mit einem selbstadjungierten Operator A geschrieben werden; man nennt häufig A – statt iA – den Erzeuger der Operatorgruppe. Zeige diesen Satz mit Hilfe des Satzes von Lumer-Phillips.

VII.6 Bemerkungen und Ausblicke

[...]

Das fundamentale Theorem VII.4.11 über die Charakterisierung der Erzeuger von Kontraktionshalbgruppen wurde 1948 unabhängig und fast gleichzeitig von Yosida (*J. Math. Soc. Japan* 1 (1948) 15–21) und Hille (in der von ihm allein verfaßten 1. Auflage von Hille/Phillips [1957]) bewiesen. Der Beweis im Text beschreibt den Zugang von Yosida, während Hilles Beweis von der Formel $e^{ta} = 1/e^{-ta} = \lim_{n\to\infty}(1 - ta/n)^{-n}$ ausgeht. Diesen Term kann man nämlich auch für einen unbeschränkten Operator A als Potenz der Resolvente $[(\mathrm{Id} - \frac{t}{n}A)^{-1}]^n$ interpretieren und auf Konvergenz untersuchen; hingegen ergeben die naheliegenden Kandidaten $\lim_n(\mathrm{Id} + \frac{t}{n}A)^n$ und $\sum_n t^n A^n/n!$ für unbeschränkte Operatoren i.a. keinen Sinn. Kurze Zeit darauf erhielten 1952 – wiederum unabhängig und fast gleichzeitig – Feller, Miyadera und Phillips die allgemeine Version des Theorems VII.4.13, das in der Literatur gelegentlich Satz von Hille-Yosida-Phillips genannt wird. Lumer und Phillips bewiesen Theorem VII.4.16 in

Pac. J. Math. 11 (1961) 679–698; der Satz von Stone über unitäre Operatorgruppen (Aufgabe VII.5.38) wurde erstmals in Stone [1932] gezeigt.

Operatorhalbgruppen finden u.a. in der Wahrscheinlichkeitstheorie Anwendung (dazu siehe z.B. Lamperti [1977]), in der mathematischen Physik (Reed/Simon [1975]) und bei den partiellen Differentialgleichungen (Pazy [1983]). Detaillierte Darstellungen der Halbgruppentheorie findet man bei Davies [1980], Engel/Nagel [1999], Goldstein [1985], Pazy [1983] und natürlich in der klassischen Quelle Hille/Phillips [1957].

Viele in den Anwendungen vorkommende Halbgruppen (T_t) besitzen die Zusatzeigenschaft, zu einer in einem Sektor $\Sigma_\alpha^0 = \Sigma_\alpha \cup \{0\} = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg(z)| < \alpha\} \cup \{0\}$ der komplexen Ebene definierten Halbgruppe (T_z) ausgedehnt werden zu können, so daß $z \mapsto T_z x$ eine banachraumwertige analytische Funktion im offenen Sektor Σ_α ist. Dabei nimmt die starke Stetigkeit bei $z = 0$ die Form $\lim_{z\to 0} T_z x = x$ an, wo die z in einem Teilsektor Σ_β^0, $\beta < \alpha$, von Σ_α^0 bleiben müssen. Solche Halbgruppen werden *analytische Halbgruppen* genannt und ihre Erzeuger *sektorielle Operatoren.* In diesem Kontext gilt folgender Satz vom Hille-Yosida-Typ:

- *Ein dicht definierter abgeschlossener Operator A erzeugt genau dann eine analytische Halbgruppe $(T_z)_{z\in\Sigma_\alpha^0}$, die in allen Teilsektoren Σ_β^0, $\beta < \alpha$, beschränkt bleibt, wenn $\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho(A)$ und für alle $\beta < \alpha$ eine Konstante C_β existiert mit*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \le C_\beta \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\beta+\pi/2}.$$

Zum Beispiel erzeugt der Laplaceoperator eine analytische Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit dem Winkel $\alpha = \pi/2$. Eine interessante Eigenschaft analytischer Halbgruppen ist, daß $T_t x \in \mathrm{dom}(A)$ für alle $x \in X$ und nicht nur für $x \in \mathrm{dom}(A)$; entsprechend ist das Cauchyproblem (VII.31) sogar für alle $x_0 \in X$ lösbar mit Lösung $u(t) = T_t x_0$ in $C([0,\infty), X) \cap C^\infty((0,\infty), X)$.

Bei der Diskussion eines Cauchyproblems ist man natürlich nicht nur an der Lösbarkeit schlechthin interessiert, sondern auch an den Eigenschaften der Lösung, z.B. an deren asymptotischem Verhalten. Im Endlichdimensionalen gilt für jede Lösung von $u' = Au$ bekanntlich $u(t) \to 0$ mit $t \to \infty$, wenn $s_0 := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda\colon \lambda \in \sigma(A)\}$, die *Spektralschranke* von A, negativ ist; genauer ist hier die Wachstumsschranke ω_0 gleich der Spektralschranke. Im unendlichdimensionalen Fall gilt $\omega_0 = s_0$ z.B. für jede analytische Halbgruppe und für positive Halbgruppen auf L^p (Weis, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995) 3089–3094 oder *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998) 3253–3256), aber nicht immer. (Ein Operator T auf einem Funktionenraum heißt positiv im Sinn von „positivitätserhaltend“, wenn $f \ge 0 \Rightarrow Tf \ge 0$.) Damit eng verwandt ist der spektrale Abbildungssatz für Halbgruppen.

- *Ist (T_t) eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A, für die $t \mapsto T_t$ auf einem Intervall* $[t_0, \infty)$ *normstetig ist (z.B. eine analytische Halb-*

gruppe), so gilt

$$e^{t\sigma(A)} := \{e^{t\lambda}\colon \lambda \in \sigma(A)\} = \sigma(T_t) \setminus \{0\}.$$

In diesem Fall folgt $\omega_0 = s_0$.

Eine andere hinreichende Voraussetzung für die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes ist, daß für $t \geq t_0$ alle T_t kompakt sind. Ohne weitere Voraussetzungen gelten aber nur $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T_t) \setminus \{0\}$ und $\omega_0 \geq s_0$, selbst wenn die T_t positive Operatoren auf einem Funktionenraum sind. Arendt (*Diff. Int. Eq.* 7 (1994) 1153–1168) gibt dafür folgendes einfache Beispiel: Sei $X = L^p(1,\infty) \cap L^r(1,\infty)$, wo $1 \leq p < r < \infty$, mit der Norm $\|f\| = \max\{\|f\|_p, \|f\|_r\}$ und $T_t f(x) = f(xe^t)$. Dann ist $(Af)(x) = xf'(x)$ und $s_0 = -1/p < -1/r = \omega_0$. Im übrigen liefert der *Satz von Datko-Pazy* ein wichtiges Kriterium für die Stabilität der Lösung (Pazy [1983], S. 116):

- *Es gilt* $\omega_0 < 0$ *genau dann, wenn für ein* $p \geq 1$

$$\int_0^\infty \|T_t x\|^p \, dt < \infty \qquad \forall x \in X.$$

Eine wichtige Frage über Erzeuger von Operatorhalbgruppen lautet: Wenn A eine C_0-Halbgruppe erzeugt und B ein weiterer Operator ist, ist dann auch $A + B$ ein Erzeuger? Wenn B beschränkt ist, trifft das zu. Für Kontraktionshalbgruppen gilt das folgende Kriterium:

- *Sei A der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe. Ferner sei B ein dissipativer Operator mit* $\mathrm{dom}(B) \supset \mathrm{dom}(A)$, *für den Konstanten* $0 \leq a < 1$ *und* $b \geq 0$ *mit*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(A)$$

existieren. Dann erzeugt auch $A + B\colon X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ *eine Kontraktionshalbgruppe.*

Die Ähnlichkeit dieses Resultats zum Störungssatz von Rellich (siehe oben) ist frappant; in der Tat kann man den Rellichschen Satz aus diesem herleiten, wenn man $A = \pm iT$ und $B = \pm iS$ setzt.

Manchmal kann man die von $A + B$ erzeugte Halbgruppe explizit beschreiben, z.B. in der folgenden *Trotter-Formel*, die ein unendlichdimensionales Analogon zu der auf Lie zurückgehenden Formel für Matrizen $e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n$ darstellt.

- *Es seien A, B und die Abschließung von $A+B$ Erzeuger der Kontraktionshalbgruppen (S_t), (T_t) und (U_t). (Der Definitionsbereich von $A+B$ ist* $\mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$.) *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (S_{t/n}T_{t/n})^n x = U_t x \qquad \forall x \in X,\ t \geq 0.$$

Ein überraschender Aspekt der Halbgruppentheorie auf L^∞ ist der Satz von Lotz (*Math. Z.* 190 (1985) 207–220), wonach jede C_0-Halbgruppe auf L^∞ automatisch normstetig ist; mit anderen Worten ist jeder Erzeuger einer C_0-Halbgruppe hier automatisch beschränkt. Es ist übrigens nicht ganz einfach, überhaupt einen dicht definierten abgeschlossenen unbeschränkten Operator in L^∞ zu definieren. Ein Beispiel erhält man so: Nach Aufgabe II.5.14 existiert ein isometrischer Operator $J\colon \ell^2 \to L^1(\mathbb{R})$. Der adjungierte Operator $J'\colon L^\infty(\mathbb{R}) \to \ell^2$ ist dann eine Quotientenabbildung und insbesondere surjektiv. Setze $\operatorname{dom}(A) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R})\colon J'f \in \ell^1\}$ und $A\colon L^\infty(\mathbb{R}) \supset \operatorname{dom}(A) \to \ell^1$, $Af = J'f$; dieser Operator hat die gewünschten Eigenschaften. Der Satz von Lotz gilt auch für ℓ^∞ und den Banachraum H^∞ aller beschränkten analytischen Funktionen im Einheitskreis.

Neue Literatur:

G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *One-Dimensional Variational Problems.* Clarendon Press, 1998.

E. B. Davies: *One-Parameter Semigroups.* Academic Press, 1980.

R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler: *Smoothness and Renormings in Banach Spaces.* Longman, 1993.

K.-J. Engel, R. Nagel: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer, 1999.

J. A. Goldstein: *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press, 1985.

S. Guerre-Delabrière: *Sequences in Classical Banach Spaces.* Marcel Dekker, 1992.

E. Hille, R. S. Phillips: *Functional Analysis and Semi-Groups.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31, 2. Auflage, 1957.

J. Jost: *Partielle Differentialgleichungen.* Springer, 1998.

J. Jost, X. Li-Jost: *Calculus of Variations.* Cambridge University Press, 1999.

J. Lamperti: *Stochastic Processes.* Springer, 1977.

A. F. Monna: *Dirichlet's Principle. A Mathematical Comedy of Errors and its Influence on the Development of Analysis.* Oosthoek Publishing Company, 1975.

A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, 1983.

R. Phelps: *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.* Springer, 2. Auflage, 1993.

J. T. Schwartz: *Nonlinear Functional Analysis.* Gordon and Breach, 1969.

J. L. Troutman: *Variational Calculus and Optimal Control.* Springer, 2. Auflage, 1996.

W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, 5. Auflage, 1993.

Y. Benyamini, J. Lindenstrauss: *Geometric Nonlinear Functional Analysis.* American Mathematical Society, 2000.

K. Deimling: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, 1985.

G. B. Folland: *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, 2. Auflage, 1995.

▶ M. Mathieu: *Funktionalanalysis.* Spektrum-Verlag, 1998.

R. B. Megginson: *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, 1998.

▶ H. Schröder: *Funktionalanalysis.* Akademie-Verlag, 1997.

▶ V. S. Sunder: *Functional Analysis: Spectral Theory.* Birkhäuser, 1998.

F. Trèves: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, 1967.