De nouveau: M-idéaux des espaces d'opérateurs compacts

par Dirk Werner

Le but de cet exposé est de résumer quelques nouveaux résultats sur les espaces de Banach où l'espace d'opérateurs compacts forme un M-idéal dans l'espace d'opérateurs bornés. D'abord nous rappelons la définition d'un M-idéal, introduite par Alfsen et Effros dans leur article important [1], et donnons quelques résultats d'un genre général sur des M-idéaux.

Un sous-espace fermé J d'un espace de Banach X est appelé M-idéal s'il existe une projection P (dite L-projection) de X^* sur $J^\perp$, l'annihilateur de J, telle que

$$\|x^*\| = \|Px^*\| + \|x^* - Px^*\| \qquad \forall x^* \in X^*.$$

Voici quelques exemples:

- Dans un espace $C(K)$ les M-idéaux sont exactement les sous-espaces

  $$J_D = \{x \in C(K) : x|_D = 0\}$$

  (avec $D \subset K$ fermé), c'est-à-dire les idéaux et les M-idéaux coïncident.

- Plus généralement, dans un C^*-algèbre les deux notions d'idéal et de M-idéal coïncident [27].

- En particulier il découle de l'exemple précédent que $K(H)$, l'espace d'opérateurs compacts sur un Hilbert, est un M-idéal dans $L(H)$. Cela semble être le premier exemple non-trivial d'un M-idéal qui figure dans la littérature, découvert par Dixmier en 1950 [9] (sans utiliser le mot M-idéal, bien sûr).

- Dans de nombreux cas, la description de M-idéaux dans un espace de fonctions $X \subset C(K)$ est la même que dans $C(K)$, c.-à-d. les M-idéaux sont exactement les sous-espaces
$$J_D \cap X = \{x \in X : x|_D = 0\}.$$
C'est particulièrement vrai pour l'algèbre de disque $A \subset C(\mathbb{T})$ (une conséquence du théorème de F. & M. Riesz) et pour les G-espaces
$$X = \{x \in C(K) : \ x(t_\alpha) = \lambda_\alpha x(s_\alpha) \quad \forall \alpha\}$$
où α parcourt un ensemble d'indices quelconque [28].

- La classe d'espaces qui sont des M-idéaux dans leurs biduaux est étudiée dans beaucoup de travaux (p.ex. [11], [14], [12], [13], [15]). Notons que c_0, $K(H)$, l'espace quotient $C(\mathbb{T})/A$, leurs sous-espaces et leurs espaces quotients appartiennent à cette classe.

Prenons l'occasion de donner un nouvel exemple d'un espace M-idéal de son bidual. On considère l'espace $L^\infty + L^2$, relatif à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, muni de la norme (équivalente à la norme usuelle)
$$\|f\| = \inf\{\|f_1\|_{L^\infty} \vee \|f_2\|_{L^2} : \ f = f_1 + f_2, \ f_1 \in L^\infty, \ f_2 \in L^2\},$$
avec son sous-espace fermé $(L^\infty + L^2)_f$ engendré par les fonctions caractéristiques par rapport aux ensembles à mesure finie. Nous affirmons:

- $(L^\infty + L^2)_f$ *est un M-idéal de son bidual.*

Il est bien connu que le dual de $(L^\infty + L^2)_f$ s'identifie avec sa norme à l'espace $L^1 \cap L^2$, normé par
$$\|g\| = \|g\|_{L^1} + \|g\|_{L^2},$$
et son bidual s'identifie à l'espace $L^\infty + L^2$ lui-même. Regardons $X = L^1 \cap L^2$ comme diagonale dans $L^1 \oplus_1 L^2$. On vérifie sans difficulté que l'annihilateur de X dans $(L^1 \oplus_1 L^2)^* = L^\infty \oplus_\infty L^2$ est
$$X^\perp = \{(f, -f) : \ f \in L^\infty \cap L^2\},$$
et l'on voit
$$\begin{aligned} X^{\perp\perp} &= \{(\ell, g_1, g_2) \in L^1_s \oplus_1 L^1 \oplus_1 L^2 : \ \langle \ell, f\rangle + \int (g_1 - g_2) f = 0 \quad \forall f \in L^\infty \cap L^2\} \\ &= \{(\ell, g_1, g_2) \in L^1_s \oplus_1 L^1 \oplus_1 L^2 : \ \langle \ell, 1_E\rangle + \int_E (g_1 - g_2) = 0 \quad \text{si} \ \ \lambda(E) < \infty\}. \end{aligned}$$
Ici on écrit $(L^1)^{**} = L^1_s \oplus_1 L^1$ où L^1_s, l'espace de fonctionnels "singuliers", consiste en toutes les mesures purement finiement additives [35]. On en déduit
$$X^{\perp\perp} = X_s \oplus_1 X$$
avec
$$\begin{aligned} X_s &\cong \{\ell \in (L^1)^{**} : \ \langle \ell, 1_E\rangle \quad \text{si} \ \ \lambda(E) < \infty\} \\ &\cong (L^\infty + L^2)_f{}^\perp \end{aligned}$$

ce qui montre l'affirmation. (Naturellement L^2 peut être remplacé par un espace de fonctions de Köthe réflexif.)

Remarquons de plus que l'espace de Bergman ($\mathbb{D}$ = disque unité)

$$B^1 = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} :\ f \text{ analytique},\ \|f\| = \int |f(x+iy)|dxdy < \infty\}$$

a un prédual qui est M-idéal de son bidual. Cependant, ce prédual n'est pas facile à décrire. (Cet exemple m'a été signalé par Elisabeth Werner.) Lié à cet exemple est le problème suivant, suggéré par Gilles Godefroy: On sait que l'espace de Bloch petit

$$\beta_0 = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} :\ f \text{ analytique},\ f(0) = 0,\ \lim_{|z|\to 1} f'(z) \cdot (1 - |z|^2) = 0\},$$

muni de sa norme naturelle

$$\|f\|_{\beta_0} = \sup_z |f'(z)| \cdot (1 - |z|^2)$$

est isomorphe à un prédual de B^1. (En effet, $B^1 \simeq \ell^1$ et $\beta_0 \simeq c_0$.) J'ignore si β_0, avec cette norme, est M-idéal de son bidual

$$\beta = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} :\ f \text{ analytique},\ f(0) = 0,\ \sup_z |f'(z)| \cdot (1 - |z|^2) < \infty\}.$$

* * *

On va mentionner quelques propriétés des M-idéaux. Le premier théorème, dû à Alfsen et Effros [1] et, sous sa forme reproduite ici, à Lima [19], caractérise les M-idéaux par une condition à intersection de boules.

Théorème 1 *Pour que $J \subset X$ soit un M-idéal il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie*[1]*:*

$$\forall y_1, y_2, y_3 \in B_J,\ x \in B_X,\ \varepsilon > 0\ \ \exists y \in J : \qquad \|x + y_i - y\| \le 1 + \varepsilon.$$

Pour la démonstration on renvoie à [19, Th. 6.17] ou, pour une version légèrement simplifiée, à [16].

Théorème 2 *Un M-idéal est Hahn-Banach lisse, c.-à-d., tout fonctionnel $y^* \in J^*$ peut être étendu de manière unique à un fonctionnel $x^* \in X^*$ ayant la même norme.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition d'un M-idéal. A cause du Théorème 2 on peut écrire

$$X^* = J^\perp \oplus_1 J^*$$

quand J est un M-idéal.

[1] $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$

Théorème 3 *Un M-idéal J est proximinal, c.-à-d., pour tout $x \in X$*

$$P_J(x) := \{y \in J : \|x - y\| = \mathrm{dist}(x, J)\} \neq \emptyset.$$

Le Théorème 3 découle du Théorème 1, voir [1] ou [3, p.126]. On peut aussi montrer que $P_J(x)$ est “large”:

$$\mathrm{lin}\, P_J(x) = J \qquad \forall x \notin J$$

Ce théorème explique l'intérêt que la notion de M-idéal a attiré dans la théorie d'approximation meilleure.
Le théorème suivant semble représenter la plus importante application de la théorie de M-idéaux dans l'analyse fonctionnelle. Il est dû à Ando [2] et, indépendamment, à Choi et Effros [8].

Théorème 4 *Soit J un M-idéal dans X. On suppose*

(a) *X/J est séparable et a la propriété d'approximation bornée*

ou

(b) *X/J est séparable et J^* est isométrique à un espace L^1.*

Alors il existe une application linéaire continue

$$L : \; X/J \longrightarrow X$$

telle que

$$qL = Id_{X/J}$$

où q désigne l'application canonique de X sur X/J. Par conséquent, J est un sous-espace complémenté de X.

On peut montrer que $\|L\| = 1$ si X/J a la propriété d'approximation métrique ou bien si $J^* \cong L^1(\mu)$. Ce théorème contient bien des résultats sur des opérateurs à l'extension simultanée, p.ex. quelques-uns de ceux de Pełczyński [25]. A titre d'exemple, on regardera deux cas particuliers:

- $X = C(K)$, $J = J_D$ avec D métrisable. Alors $X/J \cong C(D)$ est séparable et a la propriété d'approximation métrique. ($C(D)$ est un espace L^1-prédual aussi.) $L : C(D) \to C(K)$ peut être entendu comme opérateur isométrique à l'extension simultanée. (C'est le théorème de Borsuk-Dugundji.)
- $X = A$, l'algèbre de disque, $J = J_D \cap A$ où $D \subset \mathbb{T}$ est un ensemble fermé ayant mesure linéaire $\lambda(D) = 0$. Encore, $X/J \cong C(D)$ (d'après le théorème de Rudin et Carleson), et on conclut l'existence d'un opérateur isométrique à l'extension simultanée $L : C(D) \to A$. (C'est un cas spécial d'un théorème de Pełczyński.)

Donnons une application du Théorème 4 peut-être inattendue; à savoir, montrons le théorème de Sobczyk comme corollaire du Théorème 4. Ce théorème énonce:

- *Si U est un sous-espace d'un espace de Banach séparable X, qui est isométrique à c_0, alors il existe une projection π de X sur U avec $\|\pi\| \leq 2$.*

Pour la démonstration on va renormer X de sorte que U devienne un M-idéal pour la norme nouvelle. Pour cela, on note que $U^{\perp\perp} \cong \ell^\infty$ est complémenté dans X^{**} par une projection P de X^{**} sur $U^{\perp\perp}$ de norme 1. Alors $U^\perp$ est le noyau d'une projection contractive de X^*, à savoir $Q = i_X^* P^* i_{X^*}$. Faisons Q une L-projection en renormant X^*:

$$|x^*| = \|Qx^*\| + \|x^* - Qx^*\|$$

c.-à-d.

$$(X^*, |\,.\,|) = \operatorname{ran}(Q) \oplus_1 U^\perp.$$

Malheureusement $|\,.\,|$ n'est pas a priori une norme duale, mais on a pour la norme $|\,.\,|^*$ duale à $|\,.\,|$

$$(X^{**}, |\,.\,|^*) = \ker(Q^*) \oplus_\infty U^{\perp\perp}.$$

On note que $\|\,.\,\| = |\,.\,|$ sur $U^{\perp\perp}$, et on voit que $(U, \|\,.\,\|)$ est un M-idéal dans $(X^{**}, |\,.\,|^*)$ parce que $U^{\perp\perp}$ est un M-facteur[2]. A fortiori $(U, \|\,.\,\|)$ est un M-idéal dans $(X, |\,.\,|^*)$. D'après le Théorème 4 on obtient un rélèvement L de l'opérateur quotient avec $|L| = 1$. (U est un espace L^1-prédual !) On pose $\pi = Id - Lq$ et puis on vérifie aisément

$$\|\pi(x)\| = |\pi(x)|^* \leq |\pi| \cdot |x|^* \leq 2 \cdot \|x\|.$$

Cette démonstration – si compliquée qu'elle soit – a un avantage: on peut la lire de bas en haut. Ainsi on obtient une démonstration légèrement simplifiée d'un résultat de [13]:

- *Tout espace séparable U de type $\mathcal{L}^\infty$ qui est M-idéal de son bidual est isomorphe à c_0.*

[L'argument précédent marche avec $X = C[0,1]$ parce que cette fois X/U a la propriété d'approximation bornée ce qui montre que U est "séparablement injectif". Le théorème profond de Zippin [36] permet de conclure que U est isomorphe à c_0.]
On ignore si la version non-séparable de ce résultat-ci est aussi valable.

* * *

Maintenant on considère des M-idéaux dans les espaces d'opérateurs. Dans plusieurs articles, on a caractérisé les M-idéaux de $L(X,Y)$ ou $K(X,Y)$ par les M-idéaux de Y ([6], [10], [26], [29], [31], [32]).

Proposition 5

(a) [29] *On suppose que X^* n'a pas de M-idéaux non-triviaux (c.-à-d. $\neq \emptyset$, $\neq X^*$) et que X^* ou Y possède la propriété d'approximation. Alors M est un M-idéal dans $K(X,Y)$ si et seulement s'il existe un M-idéal $J \subset Y$ tel que $M = K(X,J)$.*

(b) [32] *On suppose que X^* n'a pas de M-facteurs non-triviaux. Alors M est un M-facteur dans $L(X,Y)$ si et seulement s'il existe un M-facteur $J \subset Y$ tel que $M = L(X,J)$.*

[2] Disons que J est un M-facteur de X s'il y a une M-projection P de X sur J ($\|x\| = \max\{\|Px\|, \|x - Px\|\}$). Evidemment un M-facteur est un M-idéal, mais la réciproque est fausse.

(c) [6] *On suppose que X^* admet une décomposition*

$$X^* = \ell^1(33) \oplus_1 Z$$

(p.ex. X = algèbre de disque ou $X = C(K)$). Alors M est un M-idéal dans $K(X, C(K))$ si et seulement s'il existe un ensemble fermé $D \subset K$ tel que

$$M = \{T \in L(X, C(K)) : \lim_{t \to t_0} \|T^*(\delta_t)\| = 0 \quad \forall t_0 \in D\}.$$

Les démonstrations de (a) et (b) reposent sur l'étude de points extrémaux du dual. Concernant la relation entre (a) et (b) on note que l'analogue direct de (a) pour $L(X, Y)$ est faux: nous avons déjà rencontré le M-idéal $K(H)$ dans $L(H)$. J'ignore si l'hypothèse de la propriété d'approximation est nécessaire dans (a).
Dans (c) aussi les M-idéaux de $L(X, C(K))$ sont déterminés par les M-idéaux de $C(K)$ – en faisant intervenir les fermés D. Cependant, la condition pour que M soit un M-idéal *n'est pas* $M = L(X, J_D)$, mais plus forte !

Evidemment $K(H)$ est un M-idéal de $L(H)$ d'un type différent. Cette propriété d'un Hilbert est partagée par les espaces ℓ^p:

- *$K(\ell^p)$ est un M-idéal dans $L(\ell^p)$ pour $1 < p < \infty$.*

Voici la démonstration ([20]): Soient $T \in B_{L(\ell^p)}$, $S_1, S_2, S_3 \in B_{K(\ell^p)}$ et $\varepsilon > 0$. On cherche $S \in K(\ell^p)$ tel que

$$\|T + S_i - S\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Soit P_n la projection coordonnée naturelle sur ℓ^p. On choisit S tel que

$$T - S = (Id - P_n)T(Id - P_n)$$

pour n assez grand. En effet, S est compact, et pour $n \geq n_0$ on obtiendra

$$\begin{aligned}
\|(T + S_i - S)x\|^p &\approx \|P_n S_i P_n x + (Id - P_n)T(Id - P_n)x\|^p \\
&= \|P_n S_i P_n x\|^p + \|(Id - P_n)T(Id - P_n)x\|^p \\
&\leq \|S_i P_n x\|^p + \|T(Id - P_n)x\|^p \\
&\leq \|P_n x\|^p + \|(Id - P_n)x\|^p \\
&= \|x\|^p.
\end{aligned}$$

Le $\approx$ résulte du fait que $P_n x \to x$ pour tout $x \in \ell^p$ et de même $P_n^* x^* \to x^*$ pour tout $x^* \in (\ell^p)^*$. En appliquant le Théorème 1 on obtient l'énoncé.
La même démonstration marche pour une ℓ^p-somme d'espaces de dimensions finies.

L'intervention d'approximation de l'identité dans cette preuve est nécessaire, parce qu'on a:

Proposition 6 *Si $K(X)$ est un M-idéal dans $L(X)$, alors*
(a) [21] *X est un M-idéal dans X^{**}.*
(b) [15] *X et X^* ont la propriété d'approximation compacte métrique.*
(c) [21] *Sur la sphère unité duale les topologies fortes et pré-faibles coïncident.*

(d) [18] *Si X est séparable avec la propriété d'approximation, il y a des opérateurs F_n de rang fini tel que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x$$

converge inconditionnellement, pour tout $x \in X$.

Donnons une démonstration simple de (b). Pour montrer que la boule unité de $K(X)$ soit dense dans celle de $L(X)$ pour la topologie faible ($\Leftrightarrow$ forte) d'opérateurs (c'est ce que (b) veut dire pour X) on note

$$L(X)^* = K(X)^{\perp} \oplus_1 K(X)^*$$

d'où on conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach que $B_{K(X)}$ est $\sigma(L(X), K(X)^*)$-dense dans $B_{L(X)}$. Mais $x \otimes x^* \in K(X)^*$ d'une façon naturelle, d'où l'énoncé.

Pour des sous-espaces ou espaces quotients de ℓ^p(ou d'une ℓ^p-somme comme ci-dessus) la condition (b) est déjà suffisante:

Théorème 7 [7] *Soit X un sous-espace ou espace quotient de ℓ^p($1 < p < \infty$) ayant la propriété d'approximation compacte métrique. Alors $K(X)$ est un M-idéal dans $L(X)$.*

La démonstration (voir aussi [4]) utilise une technique très intéressante. Soit (F_n) une suite d'opérateurs de rang fini telle que

$$F_n x \to x \qquad \forall x \in X.$$

D'abord on montre que l'on peut supposer

$$F_n^* x^* \to x^* \qquad \forall x^* \in X^* \tag{†}$$

aussi. Posons $Q_n = P_n|_X$. Les Q_n ont la bonne propriété d'agir comme des L^p-projections (qui étaient fondamentales pour la preuve que $K(\ell^p)$ est un M-idéal), et les F_n ont la bonne propriété de laisser X invariant (ce que les Q_n ne font pas en général). On cherche une approximation de l'identité qui a les deux propriétés à la fois. Pour cela, on note

$$F_n - Q_n \to 0$$

pour la topologie faible d'opérateurs sur $K(X, \ell^p)$, donc $F_n - Q_n \to 0$ pour la topologie $\sigma(K(X, \ell^p), K(X, \ell^p)^*)$, et l'on obtiendra pour une suite de blocs $(\widetilde{F}_n)$ de (F_n) et $(\widetilde{Q}_n)$ de (Q_n)

$$\|\widetilde{F}_n - \widetilde{Q}_n\| \to 0.$$

En travaillant avec $(\widetilde{F}_n)$ on peut répéter la preuve du cas ℓ^p.

Pour c_0 on a un résultat similaire.

Théorème 8 ([22] ou [30]) *Soit Y un sous-espace ou espace quotient de c_0 ayant la propriété d'approximation compacte métrique et X un espace de Banach quelconque. Alors $K(X, Y)$ est un M-idéal dans $L(X, Y)$.*

Cette fois (†) est plus difficile que ci-dessus à établir.
Nous avons vu que la propriété, que $K(X)$ est un M-idéal dans $L(X)$, est strictement liée avec des versions de la propriété d'approximation métrique. En effet, le théorème suivant donne une caractérisation qui relie les deux notions.

Théorème 9 [34] *$K(X)$ est un M-idéal dans $L(X)$ si et seulement s'il existe une suite généralisée (K_i) d'opérateurs compacts telle que*

$$K_i x \to x \qquad \forall x \in X \tag{1}$$

$$\limsup \|K_i S + (Id - K_i)T\| \leq \max\{\|S\|, \|T\|\} \qquad \forall S, T \in L(X) \tag{2}$$

Esquissons la démonstration de ce théorème important.
Pour comprendre la condition (2) on remarque qu'une projection P sur un Banach E est une M-projection si et seulement si

$$\|Pz_1 + (Id - P)z_2\| \leq \max\{\|z_1\|, \|z_2\|\} \qquad \forall z_1, z_2 \in E.$$

Alors la condition (2) veut dire que l'opérateur de multiplication avec K_i tend à devenir une M-projection en limite. Cependant, on ne peut pas prendre cette limite pour la topologie forte d'opérateurs, mais on doit travailler avec l'algèbre de Banach $L(X)^{**}$, muni de la deuxième multiplication d'Arens – espace très désagréable !
Supposons que $K(X)$ est un M-idéal dans $L(X)$. D'après la Proposition 6(b) $K(X)$ contient une unité approximative, de norme ≤ 1. Un point d'accumulation $z \in K(X)^{**} \cong K(X)^{\perp\perp}$ est alors une unité (à gauche) pour la deuxième multiplication d'Arens. Parce-que $K(X)$ est un idéal algébrique on en déduit que l'application

$$\ell \mapsto z.\ell$$

sur $L(X)^{**}$ est une projection contractive à l'image $K(X)^{\perp\perp}$ – elle doit donc coïncider avec la M-projection à l'image $K(X)^{\perp\perp}$ (adjointe à la L-projection à noyau $K(X)^{\perp}$) [15] !
Par conséquent

$$\|z.S + (Id - z).T\| \leq \max\{\|S\|, \|T\|\} \qquad \forall S, T \in L(X).$$

Il reste d'approximer z à l'aide du principe de la réflexivité locale (on a besoin de version de [5]) et de "presser" les approximations ($\in L(X)$) dans $K(X)$ (en utilisant la technique bloquante). Pour des détails de cet argument très joli on renvoie à [34].
La réciproque est facile puis qu'on vérifie immédiatement la condition de trois boules du Théorème 1.

Sur ces entrefaites le Théorème 9 a été appliqué pour obtenir des caractérisations plus précises. Les auteurs de [24] montrent:

Théorème 10 *Soit X un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) *$K(E, X)$ est un M-idéal dans $L(E, X^{**})$, pour tout espace de Banach E.*
(ii) *$K(X \oplus_\infty X)$ est un M-idéal dans $L(X \oplus_\infty X)$.*

(iii) *Il existe une suite généralisée (K_i) d'opérateurs compacts sur X telle que*

$$K_i x \to x \qquad \forall x \in X \tag{1}$$

$$\limsup \|K_i x_1 + (Id - K_i) x_2\| \leq \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \tag{2}$$

(Le $\limsup$ *est compris uniformément sur des ensembles bornés.)*

La condition (iii) paraît d'une façon naturelle dans [30]. Elle semble caractériser les sous-espaces de c_0 ayant la propriété d'approximation compacte métrique. Très récemment Wend Werner en a montré une version un peu affaiblie [33].
Dans [23] nous étudions des espaces de Banach pour lesquels $K(X \oplus_p X)$ est un M-idéal dans $L(X \oplus_p X)$ pour un p, $1 < p < \infty$. Nous dirons que X a la propriété (M_p) dans ce cas. Nous savons montrer:

Théorème 11 *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *X a la propriété (M_p).*

(ii) *Il existe une suite généralisée (K_i) d'opérateurs compacts sur X telle que*

$$K_i x \to x \qquad \forall x \in X \tag{1}$$

$$K_i^* x^* \to x^* \qquad \forall x^* \in X^* \tag{2}$$

$$\limsup \|K_i x_1 + (Id - K_i) x_2\| \leq (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{1/p} \tag{3}$$

$$\limsup \|K_i^* x_1^* + (Id - K_i^*) x_2^*\| \leq (\|x_1^*\|^q + \|x_2^*\|^q)^{1/q} \tag{4}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et on prend les* $\limsup$ *uniformément encore.*

Corollaire 12 *Si X a la propriété (M_p) alors*

(a) *X est réflexif,*

(b) *tout sous-espace contient de sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ^p, complémenté dans X,*

(c) *X est stable (au sens de [17]).*

On en déduit immédiatement que $K(L^p[0,1])$ n'est pas un M-idéal dans $L(L^p[0,1])$ (si $p \neq 2$) – résultat bien connu de [20] ou [18]. ($L^p[0,1]$ contient de sous-espace hilbertien.) Cependant, $K(L^p[0,1])$ est un M-idéal dans un certain sous-algèbre de $L(L^p[0,1])$, à savoir

$$\begin{aligned} A(L^p[0,1]) \; &= \{T \in L(L^p[0,1]) : \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists E, F \in [0,1] \;\; \text{tels que} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T - \chi_E T \chi_F \text{ soit compact}\} \end{aligned}$$

(Lutz Weis, communication personnelle), χ_E dénotant la projection caractéristique par rapport à E. On vérifie par exemple que la transformation de Hilbert appartient à $A(L^p[0,1])$.
Terminons par deux problèmes non résolus.

- J'ignore si X est stable dès que X est réflexif et $K(X)$ est un M-idéal dans $L(X)$. Dans l'autre direction j'ignore si les opérateurs compacts sur l'espace $T^{(2)}$ 2-convexifié de Tsirelson, espace réflexif non-stable, forment un M-idéal. (C'est presque vrai: on sait montrer que $K(\ell^2, T^{(2)})$ est un M-idéal dans $L(\ell^2, T^{(2)})$.)

- Un espace séparable à (M_p), est-il sous-espace de $\ell^p(\ell^\infty(n))$?

References

[1] E. M. Alfsen and E. G. Effros. *Structure in real Banach spaces. Part I and II.* Ann. of Math. **96** (1972), 98–173.

[2] T. Ando. *A theorem on non-empty intersection of convex sets and its applications.* J. Approx. Th. **13** (1975), 158–166.

[3] E. Behrends. *M-Structure and the Banach-Stone Theorem.* Lecture Notes in Math. 736. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[4] E. Behrends. *Sur les M-idéaux des espaces d'opérateurs compacts* Dans: B. Beauzamy, B. Maurey, and G. Pisier, éditeurs, *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1984/85. Université Paris VI/VII.* (1985), 11–18.

[5] E. Behrends. *A generalization of the principle of local reflexivity.* Rev. Roum. Math. Pures Appl. **31** (1986), 293–296.

[6] E. Behrends. *On the geometry of spaces of C_0K-valued operators.* Studia Math. **90** (1988), 135–151.

[7] C.-M. Cho and W. B. Johnson. *A characterization of subspaces X of ℓ_p for which $K(X)$ is an M-ideal in $L(X)$.* Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 466–470.

[8] M.-D. Choi and E. G. Effros. *Lifting problems and the cohomology of C^*-algebras.* Canadian J. Math. **29** (1977), 1092–1111.

[9] J. Dixmier. *Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert.* Ann. of Math. **51** (1950), 387–408.

[10] P. H. Flinn and R. R. Smith. *M-structure in the Banach algebra of operators on $C_0(\Omega)$.* Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 233–242.

[11] G. Godefroy. *Sous-espaces bien disposés de L^1 – Applications.* Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), 227–249.

[12] G. Godefroy and D. Li. *Banach spaces which are M-ideals in their bidual have property (u).* Ann. Inst. Fourier **39.2** (1989), 361–371.

[13] G. Godefroy and D. Li. *Some natural families of M-ideals* (à paraître).

[14] G. Godefroy and P. Saab. *Quelques espaces de Banach ayant les propriétés (V) ou (V^*) de A. Pełczyński.* C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A **303** (1986), 503–506.

[15] P. Harmand and Å. Lima. *Banach spaces which are M-ideals in their biduals.* Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), 253–264.

[16] P. Harmand, D. Werner, and W. Werner. *M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras.* (En préparation.)

[17] J.-L. Krivine and B. Maurey. *Espaces de Banach stables.* Israel J. Math. **39** (1981), 273–295.

[18] D. Li. *Quantitative unconditionality of banach spaces E for which $K(E)$ is an M-ideal in $L(E)$.* Studia Math. (à paraître).

[19] Å. Lima. *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 1–62.

[20] Å. Lima. *M-ideals of compact operators in classical Banach spaces.* Math. Scand. **44** (1979), 207–217.

[21] Å. Lima. *On M-ideals and best approximation.* Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 27–36.

[22] E. Oja. *Dual de l'espace des opérateurs linéaires continus.* C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A **309** (1989), 983–986.

[23] E. Oja and D. Werner. *Remarks on M-ideals of compact operators on $X \oplus_p X$.* Math. Nachr. **152** (1991), 101–111.

[24] R. Payá-Albert and W. Werner. *An approximation property related to M-ideals of compact operators.* Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).

[25] A. Pełczyński. *On simultaneous extension of continuous functions.* Studia Math. **24** (1964), 285–304.

[26] W. Ruess and D. Werner. *Structural properties of operator spaces.* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **28** (1987), 127–136.

[27] R. R. Smith and J. D. Ward. *M-ideal structure in Banach algebras.* J. Funct. Anal. **27** (1978), 337–349.

[28] U. Uttersrud. *On M-ideals and the Alfsen-Effros structure topology.* Math. Scand. **43** (1978), 369–381.

[29] D. Werner. *M-structure in tensor products of Banach spaces.* Math. Scand. **61** (1987), 149–164.

[30] D. Werner. *Remarks on M-ideals of compact operators.* Quart. J. Math. Oxford (2) (à paraître).

[31] D. Werner and W. Werner. *On the M-structure of the operator space $L(CK)$.* Studia Math. **87** (1987), 133–138.

[32] W. Werner. *Some results concerning the M-structure of operator spaces.* Math. Ann. **282** (1988), 545–553.

[33] W. Werner. *The asymptotic behaviour of the metric approximation property on subspaces of c_0.* Arch. Math. **59** (1992), 186–191.

[34] W. Werner. *Inner M-ideals in Banach algebras* (à paraître).

[35] K. Yosida and E. Hewitt. *Finitely additive measures.* Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 46–66.

[36] M. Zippin. *The separable extension problem.* Israel J. Math. **26** (1977), 372–387.

I. Math. Inst., Freie Universität Berlin, Arnimallee 2-6, D-1000 Berlin 33