Rajchmans starkes Gesetz der großen Zahlen

Dirk Werner

Rajchman[1] veröffentlichte 1932 einen Beweis der folgenden Version des starken Gesetzes der großen Zahlen:

Satz 1: *Seien* $X_1, X_2, \ldots \in L^2(\mathbb{P})$ *paarweise unkorrelierte Zufallsvariable, für die die Folge* $(\operatorname{Var} X_n)$ *der Varianzen beschränkt bleibt. Dann gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}(X_j)) \to 0 \quad f.s.$$

Insbesondere enthält dieser Satz den Fall unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariabler mit endlicher Varianz; sein Beweis erscheint jedoch viel einfacher als die üblichen Beweise des Kolmogorowschen starken Gesetzes, die freilich mehr als den gerade genannten Spezialfall zeigen. Ich habe ihn Krengels Buch *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, 3. Auflage, Vieweg 1991, S. 150, entnommen und geringfügig überarbeitet. (NB: Rajchmans Version des starken Gesetzes scheint in keinem anderen Buch vorzukommen (Ausnahme: bei Fisz ist Satz 1 als Aufgabe formuliert mit Hinweis auf die Originalarbeit), dabei verdiente der Beweis m.E. eine viel weitere Verbreitung!)

Beweis des Satzes. Zunächst darf o.E. $\mathbb{E}(X_j) = 0$ für alle j angenommen werden. Ferner setzen wir $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ sowie $K = \sup_j \operatorname{Var}(X_j)$. Zu zeigen ist dann $\frac{1}{n}S_n \to 0$ fast sicher.

Wir benötigen ein einfaches Lemma.

Lemma: *Sei* (Y_n) *eine Folge von Zufallsvariablen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) < \infty \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Dann gilt $Y_n \to 0$ *fast sicher.*

Das Lemma folgt sofort aus dem (ersten) Borel-Cantelli-Lemma, das abzählbar oft für $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ anzuwenden ist. Zurück zum Beweis des Satzes. Im ersten Schritt wird

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \to 0 \quad \text{f.s.} \tag{1}$$

gezeigt. Das folgt aus dem Lemma wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\frac{|S_{n^2}|}{n^2} \geq \varepsilon\Big) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{Var}\Big(\frac{S_{n^2}}{n^2}\Big) \qquad \text{(Tschebyschew-Ungleichung)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 n^4}\sum_{j=1}^{n^2}\operatorname{Var}(X_j) \qquad \text{(Unkorreliertheit)} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^4} n^2 K \;=\; O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir im zweiten Schritt $m = m(n) \in \mathbb{N}$ mit $m^2 \leq n < (m+1)^2$ und schätzen

$$\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \left|\frac{S_n - S_{m^2}}{n}\right| + \frac{m^2}{n}\left|\frac{S_{m^2}}{m^2}\right|$$

[1] A. Rajchman: *Zaostrzone prawo wielkich liczb.* Mathesis Polska 6 (1932), 145.

ab. Wegen (1) und $m^2 \le n$ bleibt daher, $(S_n - S_{m^2})/n \to 0$ f.s. zu zeigen. Das folgt wiederum aus dem Lemma, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{|S_n - S_{m^2}|}{n} \ge \varepsilon\Big) &\le \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{j=m^2+1}^{n} \operatorname{Var}(X_j) \qquad \text{(wie oben)} \\ &\le \frac{K}{\varepsilon^2 n^2}(n - m^2) \;=\; O(n^{-3/2})\end{aligned}$$

wegen

$$n - m^2 \le (m+1)^2 - 1 - m^2 = 2m \le 2\sqrt{n}. \qquad \square$$

Satz 1 bleibt samt Beweis für banachraumwertige Zufallsvariable gültig, die unabhängig sind und Werte in einem Banachraum vom Typ 2 annehmen. Statt der Unkorreliertheit verwendet man die Typ-2-Abschätzung

$$\mathbb{E}\big(\|\sum X_j\|^2\big) \le \text{const.} \sum \mathbb{E}\big(\|X_j\|^2\big), \quad \text{falls } \mathbb{E}(X_j) = 0 \ \forall j.$$

In funktionalanalytischer Sprache kann man Satz 1 so formulieren (es reicht natürlich, daß die Folge (f_n) orthogonal und L^2-beschränkt ist):

Satz 2: *Sei μ ein beliebiges Maß und $(f_n) \subset L^2(\mu)$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_j \to 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Dieser Satz wurde 1919 von Banach in dessen zweiter Publikation[2] bewiesen! Eine Verschärfung ist der *Satz von Rademacher-Menschow* aus dem Jahre 1922:

Satz 3: *Ist $(f_n) \subset L^2(\mu)$ ein Orthonormalsystem und $(a_n \log n) \in \ell^2$, so konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j$ fast überall.*

Offensichtlich impliziert Satz 3 für $a_n = \frac{1}{n}$ mit Hilfe des Lemmas von Kronecker Satz 2. Banachs Argument beruht übrigens auf einer Vorform von Satz 3, die 1912 von Hobson bewiesen wurde und die die stärkere Voraussetzung $(a_n n^\varepsilon) \in \ell^2$ für ein $\varepsilon > 0$ macht; insbesondere ist der Fall $a_n = \frac{1}{n}$ eingeschlossen. Daraus leitet Banach – ohne das Kronecker-Lemma zu benutzen – Satz 2 ab.

[2] S. Banach: *Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales.* Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Lettres; Classe Sci. Math. Natur. Sér. A (1919), 66–72; siehe auch Band 1 seiner Gesammelten Werke, S. 40–46.