FIXPUNKTSÄTZE

DIRK WERNER

1. Was sind Fixpunkte?

Viele Probleme der Mathematik führen darauf, eine Gleichung der Form

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

zu lösen. Indem man zur Funktion $F(x) = f(x) + x$ (oder gar $F(x) = \lambda f(x) + x$ mit einer Zahl $\lambda \neq 0$) übergeht, wird diese Gleichung in

$$F(x) = x \tag{1.2}$$

transformiert. Statt eine Nullstelle wie in (1.1) zu suchen, ist das Problem in (1.2), ein Element zu finden, das unter F fixiert wird. Solch ein x heißt ein *Fixpunkt* von F.

Nicht nur „einfache“ Gleichungen wie (1.1) können in die Fixpunktsprache übersetzt werden; das ist auch bei Gleichungssystemen möglich. Betrachten wir etwa das System

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0. \tag{1.3}$$

Setzt man $F_1(x, y) = x + f(x, y)$, $F_2(x, y) = y + g(x, y)$ sowie $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, so kann (1.3) äquivalent als Fixpunktgleichung für die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in der Form ($p \in \mathbb{R}^2$)

$$F(p) = p \tag{1.4}$$

beschrieben werden.

Für die Lösung von Gleichungen wie (1.2) und (1.4) steht nun ein ganzes Arsenal von so genannten *Fixpunktsätzen* zur Verfügung, die besagen, dass gewisse Abbildungen $F\colon A \to A$ von gewissen Mengen A in sich garantiert mindestens einen Fixpunkt, also ein p wie in (1.4), besitzen.

In dieser Vorlesungsreihe werden Sie zwei solcher Sätze kennen lernen: den *Banachschen Fixpunktsatz* in Abschnitt 3 und den *Brouwerschen Fixpunktsatz* in Abschnitt 5. Zur Formulierung und zum Beweis dieser Sätze sind einige Vorbereitungen notwendig, die in den Abschnitten 2 und 4 stehen.

2. Metrische Räume

Ein Kernbegriff in Analysis und Geometrie ist der des Abstands. Der Abstand zweier Zahlen x und x' ist als

$$d(x, x') = |x - x'|$$

erklärt. Für den Abstand zweier Punkte $p, p' \in \mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $p = (x, y)$, $p' = (x', y')$ hat man

$$d(p, p') = \bigl(|x - x'|^2 + |y - y'|^2\bigr)^{1/2};$$

Vorlesungsreihe im Schülerseminar an der FU Berlin, 14.–19. September 2009.

und ähnlich ist für $p = (x, y, z)$ und $p' = (x', y', z')$ im $\mathbb{R}^3$

$$d(p, p') = \left(|x - x'|^2 + |y - y'|^2 + |z - z'|^2\right)^{1/2}.$$

In jedem dieser Fälle sind folgende Eigenschaften für alle Punkte p, p', p'' erfüllt:

(a) $d(p, p') \geq 0$, $d(p, p') = 0$ dann und nur dann, wenn $p = p'$;
(b) $d(p, p') = d(p', p)$;
(c) $d(p, p'') \leq d(p, p') + d(p', p'')$.

Da (a) und (b) jeweils praktisch offensichtlich sind, müssen wir nur (c) begründen. Im Fall der Ebene und des Raums bedeutet (c) anschaulich, dass in einem Dreieck (gebildet aus den Punkten p, p' und p'') eine Seite höchstens so lang ist wie die Summe der beiden übrigen Längen – und das stimmt.

Die drei Eigenschaften (a), (b) und (c) bilden die Grundlage von mindestens 50% aller Mathematik. Um nicht eine Unmenge von Spezialfällen formulieren zu müssen, wird ein Kernbegriff geprägt, der alles Wesentliche enthält. Hier ist er.

Definition 2.1. Sei M eine nicht leere Menge, und sei d: $M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den drei Eigenschaften (a), (b) und (c). Dann heißt d eine *Metrik* auf M und (M, d) ein *metrischer Raum.*

Wir haben gesehen, dass $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, jeweils mit dem Abstandsbegriff der euklidischen Geometrie, metrische Räume sind. Übrigens wird die Ungleichung (c) nicht nur in diesen Fällen, sondern allgemein in metrischen Räumen *Dreiecksungleichung* genannt.

In einem metrischen Raum kann der Begriff der Konvergenz von Folgen erklärt werden. Zunächst zu $\mathbb{R}$, wo Konvergenz vielen von Ihnen schon geläufig ist. Hier nennt man eine Folge (x_n) von Zahlen konvergent mit Grenzwert x, in Zeichen $x_n \to x$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wenn anschaulich gesprochen die Folge (x_n) dem Grenzwert x beliebig nahe kommt, wenn man nur lange genug wartet. Die rigorose Definition lautet:

> Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N, so dass für $n \geq N$ gilt $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Wie man sieht, greift diese Definition auf den Abstand zweier Zahlen zurück, und wir können sie sinngemäß auf metrische Räume übertragen:

Definition 2.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (p_n) in M konvergiert gegen $p \in M$, in Zeichen $p_n \to p$ oder $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N, so dass für $n \geq N$ gilt $d(p_n, p) \leq \varepsilon$.

Eine wichtige einfache, aber nicht vollkommen selbstverständliche Bemerkung ist:

- *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Betrachten wir einige Beispiele in $\mathbb{R}$.

(a) In $\mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(1/n)$ gegen 0.

(b) Sei $0 < q < 1$. Dann konvergiert die Folge (q^n) gegen 0. Um das einzusehen, schreibe $q = 1/(1 + a)$ mit einer Zahl $a > 0$. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$(1 + a)^n = 1 + na + \cdots + a^n;$$

bei den Pünktchen stehen Terme der Form $m_k a^k$ mit $m_k \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$(1+a)^n \geq 1 + na \geq na$$

und

$$q^n \leq \frac{1/a}{n}.$$

Daraus folgt $q^n \to 0$.

(c) Sei wieder $0 < q < 1$. Setze

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n. \tag{2.1}$$

Dann gilt

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; \tag{2.2}$$

es ist nämlich

$$q s_n = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}, \tag{2.3}$$

und wenn man (2.3) von (2.1) abzieht, erhält man (2.2). Wegen Beispiel (b) folgt daraus

$$s_n \to \frac{1}{1-q},$$

wofür man auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

schreibt. Aus (2.2) folgt noch die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \leq \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

(d) Weitere Bespiele, auf die wir hier nicht näher eingehen können, sind

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \to e$$

und

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{d.h. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beispiele im $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^3$) kann man aufs Eindimensionale zurückführen.

Lemma 2.3. *Seien $p_n = (x_n, y_n)$, $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $p_n \to p$ genau dann, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$.*

Beweis. Es gilt $p_n \to p$ genau dann, wenn $d(p_n, p) \to 0$. Trifft das zu, folgt wegen $|x_n - x| \leq d(p_n, p)$ auch $x_n \to x$ und analog $y_n \to y$.

Setzt man umgekehrt $x_n \to x$ und $y_n \to y$ voraus, so folgt wegen

$$d(p_n, p) \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

(Beweis?) auch $p_n \to p$. Um letzteres rigoros zu begründen, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren Indizes N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \varepsilon/2 \quad \text{für } n \geq N_1,$$
$$|y_n - y| \leq \varepsilon/2 \quad \text{für } n \geq N_2.$$

[Hier wurde die Definition der Konvergenz von (x_n) bzw. (y_n) jeweils mit $\varepsilon/2$ benutzt.] Ist N die größere der beiden Zahlen N_1 und N_2, so folgt für $n \geq N$

$$d(p_n, p) \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was zu zeigen war. □

Wir betrachten nun gewisse Abbildungen auf metrischen Räumen.

Definition 2.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, und sei $A \subset M$. Eine Abbildung $F\colon A \to M$ heißt *Kontraktion*, wenn es eine Zahl $q < 1$ gibt mit

$$d(F(p), F(p')) \leq q\, d(p, p') \quad \text{für alle } p, p' \in A.$$

Das heißt, dass die Bildpunkte $F(p)$ und $F(p')$ stets mindestens um einen Faktor q näher benachbart sind als p und p'. Ein typisches Beispiel ist die „Stadtplanabbildung“, die einen Punkt p auf dessen Abbild $F(p)$ auf dem Stadtplan wirft.

Hier ein anderes explizites eindimensionales Beispiel:

$$F\colon [2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{x}$$

ist eine Kontraktion; $q = 1/4$ ist ein zulässiger Faktor. Es ist nämlich

$$|F(x) - F(x')| = \Bigl|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\Bigr| = \frac{|x' - x|}{x' \cdot x} \leq \frac{|x' - x|}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}|x - x'|.$$

Bemerkung und Ausblick. Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F\colon A \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|F'(x)| \leq q < 1$ für alle $x \in A$, so ist F eine Kontraktion mit dem Faktor q. Das folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Für das Folgende wird eine besondere Sorte Teilmenge eines metrischen Raums eine Rolle spielen.

Definition 2.5. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt *abgeschlossen*, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge $(p_n) \subset A$ ebenfalls in A liegt.

In $\mathbb{R}$ ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ abgeschlossen (es trägt also seinen Namen zu Recht), nicht aber das offene Intervall (a, b). In $\mathbb{R}^2$ sind Quadrate, Kreise, Halbebenen etc. inklusive ihrer Ränder abgeschlossen.

Jetzt fehlt noch eine wichtige Eigenschaft, die nicht allen metrischen Räumen zukommt, wohl aber den euklidischen Räumen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ etc. Es geht darum, dass es in $\mathbb{R}$ (im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$) keine „Lücken“ gibt (in $\mathbb{Q}$ wäre $\sqrt{2}$ solch eine Lücke). Das zu präzisieren, ist schwierig. So geht's.

Definition 2.6. Eine Folge (p_n) in einem metrischen Raum heißt *Cauchyfolge*, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N, so dass für $m, n \geq N$ gilt $d(p_n, p_m) \leq \varepsilon$. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Anschaulich kommen die Glieder einer Cauchyfolge einander beliebig nahe, wenn man nur lange genug wartet. Eine solche Folge „sollte eigentlich“ konvergieren; es kann aber vorkommen, dass der Möchtegern-Grenzwert eine Lücke im Raum ist, wie etwa $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ für die Folge der rationalen Approximationen

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \ldots$$

In einem vollständigen Raum gibt es keine solche Lücken.

Satz 2.7. *Die metrischen Räume $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind vollständig.*

Dieser Satz kann und sollte intuitiv akzeptiert werden; ihn zu begründen greift tief in die Grundlagen der reellen Zahlen.

3. Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir haben jetzt alle Begriffe beisammen, um diesen Satz formulieren zu können. (Beim ersten Lesen denke man an ein abgeschlossenes Quadrat der Ebene $\mathbb{R}^2$, wenn man einige der abstrakten Terme umgehen möchte.)

Theorem 3.1. (Banachscher Fixpunktsatz)
Es seien (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset M$ eine abgeschlossene nicht leere Teilmenge und $F \colon A \to A$ eine Kontraktion. Dann besitzt F einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

Beweis. Wir beweisen zuerst die Existenz eines Fixpunkts. Dazu sei $p_0 \in A$ beliebig. Wir definieren eine Folge (p_n) in A iterativ durch

$$p_1 = F(p_0),\ p_2 = F(p_1),\ p_3 = F(p_2),\ \ldots,$$

also allgemein

$$p_{n+1} = F(p_n).$$

Diese Konstruktion kann man durchführen, da F die Menge A in sich überführt. Wir werden jetzt drei Dinge zeigen: (1) (p_n) ist eine Cauchyfolge; (2) ihr Grenzwert liegt in A und ist (3) ein Fixpunkt von F.

Zu (1). Für jeden Index k ist, wenn q eine Kontraktionskonstante gemäß Definition 2.4 bezeichnet,

$$\begin{aligned} d(p_k, p_{k+1}) &= d(F(p_{k-1}), F(p_k)) \\ &\leq q\, d(p_{k-1}, p_k) \\ &= q\, d(F(p_{k-2}), F(p_{k-1})) \\ &\leq q^2\, d(p_{k-2}, p_{k-1}) \\ &\leq \ldots \leq q^k\, d(p_0, p_1). \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung der „Dreiecksungleichung" (c) einer Metrik erhalten wir für Indizes $m \geq n$

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p_{n+1}) + d(p_{n+1}, p_{n+2}) + \cdots + d(p_{m-1}, p_m),$$

also nach der obigen Überlegung

$$\begin{aligned} d(p_n, p_m) &\leq q^n\, d(p_0, p_1) + q^{n+1}\, d(p_0, p_1) + \cdots + q^{m-1}\, d(p_0, p_1) \\ &= q^n (1 + q + \cdots + q^{m-n-1}) d(p_0, p_1). \end{aligned}$$

Nach (2.4) in Beispiel (c) in Abschnitt 2 bleibt der Ausdruck in der Klammer unterhalb von $1/(1-q)$, da $q < 1$ ist. Es folgt

$$d(p_n, p_m) \leq \frac{q^n}{1-q} d(p_0, p_1) \qquad \text{für } m \geq n. \tag{3.1}$$

Nun gilt $q^n \to 0$ (siehe Beispiel (b) in Abschnitt 2); also strebt für $n \to \infty$ die rechte Seite in (3.1) gegen 0 und wird daher $\leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Damit ist gezeigt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(p_n, p_m) \leq \varepsilon \qquad \text{für } m \geq n \geq N.$$

Da man in der letzten Zeile wegen der Symmetrie von d die Rollen von m und n vertauschen kann, ist (p_n) eine Cauchyfolge.

Zu (2). Weil M als vollständig vorausgesetzt ist, existiert $\hat{p} = \lim_{n\to\infty} p_n$. Da p_n stets in A liegt und A abgeschlossen ist, liegt auch $\hat{p}$ in A.

Zu (3). Aus $p_n \to \hat{p}$ folgt $F(p_n) \to F(\hat{p})$, denn

$$d(F(p_n), F(\hat{p})) \leq q\, d(p_n, \hat{p}) \to 0.$$

Andererseits ist $F(p_n) = p_{n+1}$, also konvergiert $(F(p_n))$ ebenfalls gegen $\hat{p}$. Nun ist der Grenzwert einer Folge in einem metrischen Raum eindeutig bestimmt, wie im Anschluss an Definition 2.2 beobachtet wurde; also muss $F(\hat{p}) = \hat{p}$ sein: $\hat{p}$ ist ein Fixpunkt von F.

Es bleibt, die Eindeutigkeit des Fixpunkts zu begründen. Ist $\tilde{p}$ ebenfalls Fixpunkt von F, so gilt

$$d(\hat{p}, \tilde{p}) = d(F(\hat{p}), F(\tilde{p})) \leq q\, d(\hat{p}, \tilde{p}).$$

Wäre $\hat{p} \neq \tilde{p}$, folgte der Widerspruch $1 \leq q$; also ist $\hat{p} = \tilde{p}$, was die behauptete Eindeutigkeit zeigt. $\square$

Wie bereits bemerkt, ist der Satz insbesondere für abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ wie Quadrate, Kreise, Dreiecke, Kreisringe, Halbebenen, Sektoren etc. gültig und natürlich auch für abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Für die zeitgenössische Mathematik ist die Bemerkung wesentlich, dass der Banachsche Fixpunktsatz auch für „unendlichdimensionale“ Räume (Funktionenräume) eingesetzt werden kann und z.B. in der Theorie der Differentialgleichungen Anwendung findet.

Der Beweis des Satzes hat nicht nur die bloße Existenz eines Fixpunkts nebst Eindeutigkeit gezeigt, sondern auch ein Konstruktionsverfahren geliefert: Für jeden Startwert p_0 konvergiert die Folge der Iterationen $p_{n+1} = F(p_n)$ gegen den Fixpunkt $\hat{p}$, und wir besitzen sogar eine explizite Abschätzung, wie gut die Approximation im n-ten Schritt mindestens ist. Aus (3.1) folgt nämlich mit $m \to \infty$

$$d(p_n, \hat{p}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(p_0, p_1). \tag{3.2}$$

Deswegen ist der Banachsche Fixpunktsatz auch in der numerischen Mathematik von großer Bedeutung.

Wir wollen abschließend ein einfaches Beispiel betrachten. Zu lösen ist die Gleichung

$$x = \frac{\cos x + \sin x}{4}. \tag{3.3}$$

Setzt man

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\cos x + \sin x}{4},$$

so ergibt sich für $x, x' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x')| &= \frac{1}{4}|\cos x + \sin x - \cos x' - \sin x'| \\ &\leq \frac{1}{4}\big(|\cos x - \cos x'| + |\sin x - \sin x'|\big). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sin x - \sin x' &= 2\cos\frac{x+x'}{2}\sin\frac{x-x'}{2}, \\ \cos x - \cos x' &= -2\sin\frac{x+x'}{2}\sin\frac{x-x'}{2}, \end{aligned}$$

und stets ist (Skizze!)

$$|\sin u| \leq |u|, \ |\sin u| \leq 1, \ |\cos u| \leq 1.$$

Daraus ergibt sich

$$|F(x) - F(x')| \leq \frac{1}{4}\big(|\cos x - \cos x'| + |\sin x - \sin x'|\big) \leq \frac{1}{2}|x - x'|.$$

[Das hätte man auch mittels der Ableitung schließen können, vgl. Bemerkung auf Seite 4.]

Also ist F eine Kontraktion, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat (3.3) genau eine Lösung, die als Grenzwert der Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ gewonnen werden kann. Startet man bei $x_0 = 0$, lauten die ersten Glieder dieser Folge auf 5 Stellen

0; 0.25; 0.30407; 0.31338; 0.31489; 0.31513; 0.31517; 0.31518; 0.31518.

4. Einige kombinatorische und analytische Hilfsssätze

Zum Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, den wir im nächsten Abschnitt behandeln, sind unter anderem einige kombinatorische Vorbereitungen nötig.

Wir beginnen mit einem eindimensionalen „Färbungsproblem". Wir betrachten ein Intervall $[a, b]$ und zerlegen es durch Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$. Jeder Teilpunkt wird nun mit einer der Farben rot oder grün gefärbt. Hier steht nur fest, dass a rot und b grün ist; über die Färbung der anderen Punkte wissen wir nichts weiter. Wir nennen ein Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ *zweifarbig*, wenn x_k und x_{k+1} unterschiedliche Farben haben. Dann gilt folgende Aussage.

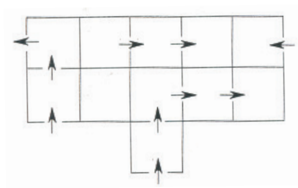
Lemma 4.1. *Es gibt ein zweifarbiges Teilintervall; in der Tat ist die Anzahl der zweifarbigen Teilintervalle ungerade.*

Beweis. Wir durchwandern das Intervall $[a, b]$ von links nach rechts und zählen, wie oft eine Farbänderung auftritt. Das geschieht mindestens einmal, da wir bei rot beginnen und bei grün aufhören. Bei der Wanderung ist die erste Änderung von rot nach grün und die letzte auch. Auf jede rot$\to$grün-Änderung folgt eine grün$\to$rot-Änderung und umgekehrt. Sind deren Anzahlen $n_{r\to g}$ bzw. $n_{g\to r}$, so haben wir gerade $n_{r\to g} = n_{g\to r} + 1$ begründet. Die Gesamtzahl der zweifarbigen Intervalle beträgt also $n_{r\to g} + n_{g\to r} = 2n_{g\to r} + 1$ und ist ungerade. $\square$

In unserem nächsten Lemma beschäftigen wir uns mit einem Haus, das nach folgenden Regeln gebaut ist. Jedes Zimmer hat höchstens 2 Türen; ein Zimmer mit 2 Türen heißt *Durchgangszimmer*, eines mit einer Tür *Endzimmer* und eines ohne Türen *Geheimzimmer*. Es gibt Innen- und Außentüren (letztere führen von außen ins Haus bzw. umgekehrt), zwischen je zwei Zimmern ist höchstens eine Tür, und jedes Zimmer hat höchstens eine Außentür (vgl. Skizze unten). Dann gilt:

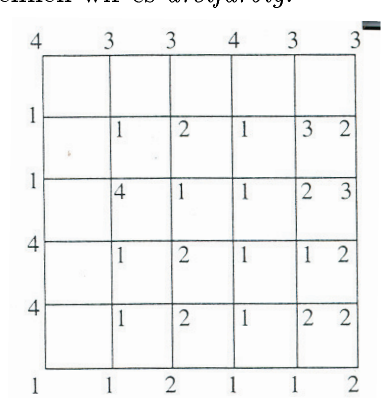
Lemma 4.2. *Die Anzahl der Außentüren und die Anzahl der Endzimmer sind entweder beide gerade oder beide ungerade.*

Beweis. Wir zählen, auf wie viele Weisen man durch das Haus laufen kann, wenn man jedes Zimmer (außer den Geheimzimmern) genau einmal besucht, z.B.



Es gibt Wege von einer Außentür zu einer anderen (deren Anzahl sei k), Wege von einem Endzimmer zu einem anderen (deren Anzahl sei l) und Wege von einer Außentür zu einem Endzimmer bzw. umgekehrt (deren Anzahl sei m). Dann ist die Anzahl der Außentüren $2k + m$ und die Anzahl der Endzimmer $2l + m$; also sind diese Anzahlen beide gerade (nämlich wenn m gerade ist) oder beide ungerade (nämlich wenn m ungerade ist). $\square$

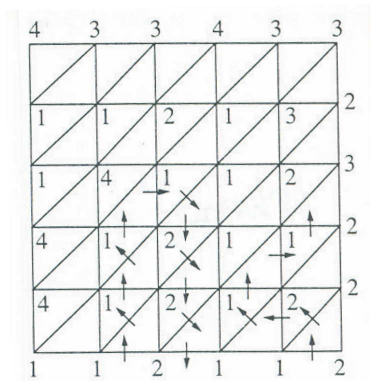
Wir kommen jetzt zum entscheidenden Lemma, das nach seinem Urheber *Spernersches Lemma* genannt wird. Wir betrachten ein Quadrat, das durch waagerechte und senkrechte Linien in n^2 Teilquadrate aufgeteilt ist. Inklusive der Außenseiten gibt es also je $n + 1$ waagerechte und senkrechte Linien. Die Schnittpunkte je zweier Linien heißen *Gitterpunkte*. Die Gitterpunkte werden nun nach folgenden Regeln mit einer der „Farben“ 1, 2, 3, 4 gefärbt: Der Eckpunkt links unten bekommt 1 zugewiesen, der Eckpunkt rechts unten 2, der Eckpunkt rechts oben 3 und der Eckpunkt links oben 4. Die Gitterpunkte auf einer Außenseite dürfen nur mit den Farben der zugehörigen Eckpunkte gefärbt werden, z.B. können auf der unteren Außenseite nur 1 oder 2 auftauchen. Wenn ein Teilquadrat mit mindestens drei Farben versehen ist, nennen wir es *dreifarbig*.



Dann gilt:

Lemma 4.3. (Spernersches Lemma)
Es gibt mindestens ein dreifarbiges Teilquadrat.

Beweis. Wir teilen jedes Teilquadrat durch eine Diagonale von links unten nach rechts oben in zwei Teildreiecke:



Wir wollen nun Lemma 4.2 anwenden und machen folgende Übersetzung: Das große Quadrat ist das Haus, die kleinen Dreiecke sind die Zimmer, und eine mit 1 und 2 gefärbte Seite eines Dreiecks ist eine Tür. Endzimmer sind dann Dreiecke, die mit 1, 2, 3 oder 1, 2, 4 gefärbt sind, Durchgangszimmer solche mit der Färbung 1, 1, 2 oder 1, 2, 2 und Geheimzimmer alle übrigen Dreiecke. Da wegen der Färbungsbedingung für den Rand des Quadrats nur auf dem unteren Rand Außentüren liegen können, hat jedes Zimmer höchstens eine Außentür und im übrigen höchstens zwei Türen insgesamt. Die Voraussetzungen für Lemma 4.2 sind daher erfüllt.

Wegen Lemma 4.1 ist die Anzahl der Außentüren ungerade, und wegen Lemma 4.2 ist die Anzahl der Endzimmer ebenfalls ungerade. Es gibt also mindestens ein Endzimmer! Dieses ist Teil eines dreifarbigen Quadrats. □

Nun zu den analytischen Vorbereitungen. Wir betrachten im nächsten Abschnitt stetige Abbildungen eines Quadrats $Q \subset \mathbb{R}^2$ in sich, $F\colon Q \to Q$. Wir diskutieren zuerst einen Stetigkeitsbegriff, der in der mathematischen Literatur als Lipschitz-Stetigkeit bekannt ist.

Definition 4.4. Seien (M, d) ein metrischer Raum und $F\colon M \to M$ eine Abbildung. F heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Zahl L mit

$$d(F(p), F(p')) \leq L d(p, p') \qquad \text{für } p, p' \in M \tag{4.1}$$

gibt. Solch ein L heißt *Lipschitz-Konstante* von F.

Kontraktionen sind Lipschitz-stetig, und eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante < 1 ist eine Kontraktion.

Die Lipschitz-Stetigkeit hat folgende geometrische Konsequenz. Wir setzen

$$B_\varepsilon(p) = \{p' \in M\colon d(p', p) \leq \varepsilon\}$$

und nennen $B_\varepsilon(p)$ die *Kugel* um p mit Radius ε, nicht nur im Fall der euklidischen Metrik (im Zweidimensionalen wäre es ein Kreis).

Lemma 4.5. *Sei $\varepsilon > 0$, und sei $F\colon M \to M$ Lipschitz-stetig mit* (4.1). *Sei $\delta = \varepsilon/L$. Dann bildet F die Kugel $B_\delta(p)$ in die Kugel $B_\varepsilon(F(p))$ ab: $F\big(B_\delta(p)\big) \subset B_\varepsilon(F(p))$.*

Beweis. Sei $p' \in B_\delta(p)$, also $d(p', p) \leq \delta$. Wegen (4.1) ist

$$d(F(p'), F(p)) \leq Ld(p', p) \leq L\delta = \varepsilon,$$

d.h. $F(p') \in B_\varepsilon(F(p))$. □

Von hier ist es ein kleiner Schritt zur eigentlichen Definition der Stetigkeit. Wer ihn nicht gehen möchte, ersetze im folgenden Stetigkeit durch Lipschitz-Stetigkeit.

Definition 4.6. Eine Abbildung $F\colon M \to M$ auf einem metrischen Raum heißt *stetig*, wenn es zu jedem $p \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ mit $F\big(B_\delta(p)\big) \subset B_\varepsilon(F(p))$ gibt.

Explizit heißt diese Inklusion:

$$d(p', p) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d(F(p'), F(p)) \leq \varepsilon;$$

F bildet also Punkte, die „hinreichend nahe" bei p liegen, auf Punkte ab, die „nahe" bei $F(p)$ liegen. Im Gegensatz zur Lipschitz-Stetigkeit gestattet Definition 4.6, dass das δ von p abhängt; selbst wenn δ unabhängig von p zu wählen ist, braucht die Abhängigkeit von ε nicht linear zu sein wie in Lemma 4.5.

In den euklidischen Räumen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ etc. sind alle Abbildungen, die durch eine explizite Formel gegeben sind, stetig; das soll hier aber weder präzisiert noch bestätigt werden. Hingegen ist die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ oder $[0, 1]$ zwar stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Nun fehlt nur noch eine Vorbereitung. Eine Folge reeller Zahlen braucht natürlich nicht zu konvergieren; betrachte z.B. $x_n = (-1)^n$. Aber hier konvergiert die Teilfolge, die man erhält, wenn man nur die geraden Indizes betrachtet, $x_{2n} = 1$. Solche Teilfolgen gibt es stets bei beschränkten Folgen.

Satz 4.7. (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede Folge in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $[a, b]$.

Beweis. Sei $(x_n) \subset [a, b]$. Wir setzen $m = \frac{1}{2}(a + b)$ und betrachten die Teilintervalle $[a, m]$ und $[m, b]$. In mindestens einem davon liegen unendlich viele Folgenglieder, sagen wir in $[a, m]$. Dieses Intervall bezeichnen wir nun mit $[a_1, b_1]$, und den kleinsten Index eines Folgenglieds in $[a_1, b_1]$ nennen wir n_1.

Jetzt wiederholen wir diese Überlegung mit dem Intervall $[a_1, b_1]$. Setze $m_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ und betrachte die Teilintervalle $[a_1, m_1]$ und $[m_1, b_1]$. Mindestens eines davon enthält unendlich viele Folgenglieder; wir nennen es $[a_2, b_2]$, und den kleinsten Index eines Folgenglieds in $[a_2, b_2]$, der größer als n_1 ist, nennen wir n_2. Usw.

Auf diese Weise erhalten wir eine Teilfolge unserer ursprünglichen Folge. Vom r-ten Schritt ab liegt diese Teilfolge in einem Intervall $[a_r, b_r]$ der Länge $(b-a)/2^r$. Wegen $\lim_{r\to\infty}(b-a)/2^r = 0$ ist (x_{n_k}) eine Cauchyfolge, und weil

$\mathbb{R}$ vollständig ist (Satz 2.7), konvergiert (x_{n_k}). Es ist klar, dass der Grenzwert in $[a, b]$ liegen muss. □

Wir benötigen die zweidimensionale Version dieses Satzes.

Satz 4.8. *Jede Folge in einem abgeschlossenen Quadrat $Q = [a, b] \times [a, b]$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in Q.*

Beweis. Wir führen die Aussage mit Lemma 2.3 auf den vorherigen Satz zurück. Sei also $(p_n) = (x_n, y_n)$ eine Folge in Q. Dann ist (x_n) eine Folge in $[a, b]$. Nach Satz 4.7 existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in [a, b]$. Betrachte jetzt die Folge $(y_{n_k}) \subset [a, b]$. Auch diese besitzt eine konvergente Teilfolge, sagen wir $y_{n_{k_l}} \to y \in [a, b]$. Da nach wie vor $x_{n_{k_l}} \to x$ gilt, folgt wegen Lemma 2.3 $p_{n_{k_l}} \to p = (x, y) \in Q$. □

Man nennt eine Teilmenge A eines metrischen Raums *kompakt*, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A besitzt. In dieser Sprache besagt Satz 4.8, dass abgeschlossene Quadrate kompakt sind.

5. Der Brouwersche Fixpunktsatz

Wir betrachten diesen Satz im Detail für Abbildungen auf einem Quadrat.

Theorem 5.1. (Brouwerscher Fixpunktsatz für ein Quadrat)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat, und sei $F \colon Q \to Q$ stetig. Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Beweis. Falls F keinen Fixpunkt besäße, wäre der Vektor $v(p) = F(p) - p$ von p nach $F(p)$ stets $\neq 0$, und der Winkel $\alpha(p)$, den er mit der positiven horizontalen Achse (x-Achse) bildet, ist wohldefiniert im Intervall $[0, 2\pi)$. Jedem Punkt $p \in Q$ wird nun auf folgende Weise eine Farbe $\in \{1, 2, 3, 4\}$ zugeordnet.

Winkel	Farbe
$0 < \alpha(p) < \frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2} < \alpha(p) < \pi$	2
$\pi < \alpha(p) < \frac{3}{2}\pi$	3
$\frac{3}{2}\pi < \alpha(p) < 2\pi$	4
$\alpha(p) = 0$	4 oder 1
$\alpha(p) = \frac{\pi}{2}$	1 oder 2
$\alpha(p) = \pi$	2 oder 3
$\alpha(p) = \frac{3}{2}\pi$	3 oder 4

In den letzten 4 Fällen ist die Wahl einer der beiden Farben frei mit folgender Ausnahme. Für die 4 Eckpunkte legen wir definitiv fest: links unten 1, rechts unten 2, rechts oben 3, links oben 4; und für die äußeren Kanten fordern wir, dass nur die Farben der Eckpunkte verwendet werden dürfen. [Ist p zum Beispiel auf der unteren Kante, so ist $0 \leq \alpha(p) \leq \pi$, da $F(p) \in Q$. Im Fall $0 < \alpha(p) < \pi$ ist die Wahl der Farbe 1 oder 2 zwingend, im Fall $\alpha(p) = 0$ bzw. $= \pi$ fordern wir, dass die Wahl 1 bzw. 2 zu treffen ist.]

Nun betrachten wir zu $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung des Quadrats in n^2 Teilquadrate. Für die Gitterpunkte haben wir dann oben eine für das Spernersche Lemma (Lemma 4.3) zulässige Färbung definiert. Dieses Lemma liefert die Existenz eines dreifarbigen Teilquadrats Q_n, dessen linker unterer Eckpunkt p_n sei.

Da Q kompakt ist (Satz 4.8), existiert eine konvergente Teilfolge $p_{n_k} \to p \in Q$. Nach unserer Annahme ist p kein Fixpunkt (F hat ja angeblich gar keine), und wir werden das zu einem Widerspruch führen.

Weil also $F(p) \neq p$ ist, haben p und $F(p)$ mindestens eine unterschiedliche Koordinate, sagen wir, die y-Koordinate ist unterschiedlich, und $F(p)$ liegt oberhalb von p. (Die übrigen Fälle sind analog zu behandeln.) Wir „trennen“ p und $F(p)$ durch eine horizontale Gerade. Es sei ε kleiner als der Abstand von $F(p)$ zu dieser Geraden; dann liegt $B_\varepsilon(F(p))$ oberhalb der Geraden. Nun wählen wir zu p und ε ein $\delta > 0$ gemäß der Definition der Stetigkeit, also so, dass

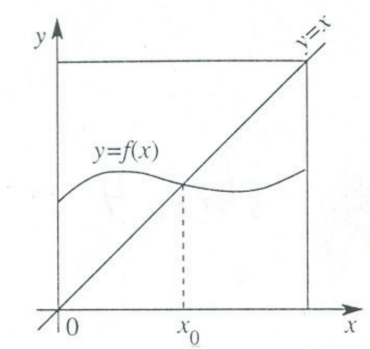
$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)). \tag{5.1}$$

Da man ohne Schaden bei Bedarf zu einem kleineren δ übergehen kann, dürfen wir annehmen, dass $B_\delta(p)$ ganz unterhalb der trennenden Geraden liegt. [Wer statt der Stetigkeit von F die Lipschitz-Stetigkeit voraussetzen möchte, muss an dieser Stelle Lemma 4.5 anwenden.]

Da (p_{n_k}) gegen p konvergiert und die übrigen Ecken des dreifarbigen Quadrats Q_{n_k} von p_{n_k} den Abstand $1/n_k$ bzw. $\sqrt{2}/n_k$ haben, gilt $Q_{n_k} \subset B_\delta(p)$ für große k. Aber mindestens eine Ecke von Q_{n_k} hat die Farbe 3 oder 4. Es gibt also einen Punkt $p^* \in B_\delta(p)$ mit $\alpha(p^*) \in [\pi, 2\pi) \cup \{0\}$. Das widerspricht (5.1), welches nämlich $\alpha(p^*) \in (0, \pi)$ impliziert.

Die Annahme, dass F keinen Fixpunkt hat, ist zum Widerspruch geführt. Damit ist die Existenz eines Fixpunkts bewiesen. □

Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt auch für abgeschlossene Dreiecke oder Kreise und deren höherdimensionale Analoga, nicht aber für einen Kreisring. In der Dimension 1, also für stetige Abbildungen $f\colon [a, b] \to [a, b]$, ist der Satz übrigens anschaulich sofort zu erfassen:



Mathematikstudenten lernen im 1. Semester, diese Version rigoros mit dem so genannten Zwischenwertsatz zu begründen.

Im Unterschied zum Banachschen Fixpunktsatz macht der Brouwersche keine Eindeutigkeitsaussage (die würde auch gar nicht stimmen), und der

Beweis ist ein reiner Existenzbeweis, der keine Konstruktionsmöglichkeit eines Fixpunkts aufzeigt.

Als erste Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes sehen wir sofort, dass das Gleichungsssystem

$$\begin{aligned} x &= \sin(10y + \cos x) \\ y &= \cos(xy) \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt. Die Abbildung

$$F\colon (x, y) \mapsto (\sin(10y + \cos x), \cos(xy))$$

ist nämlich stetig[1] und bildet das Quadrat $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ in sich ab, denn Sinus und Kosinus nehmen nur Werte zwischen -1 und 1 an. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz hat F einen Fixpunkt in Q; also hat unser Gleichungssystem eine Lösung. (Übrigens ist der Banachsche Fixpunktsatz nicht auf unser Problem anwendbar, da F keine Kontraktion ist.)

Hier ist eine weitere Anwendung. Wir betrachten ein achsenparalleles Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ und nennen den Mittelpunkt der linken Seite A, den der rechten Seite B, den der unteren Seite C und den der oberen Seite D. Wir verbinden A und B sowie C und D jeweils mittels einer in R verlaufenden stetigen Kurve. Dann besitzen die beiden Kurven einen Schnittpunkt.

So anschaulich evident diese Aussage sein mag, so schwierig ist sie rigoros zu beweisen. In der Tat geht es mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz. Zuerst müssen wir präzisieren, was mit den „stetigen Kurven“ gemeint ist, nämlich zwei stetige Abbildungen

$$\Phi\colon [-1, 1] \to R, \quad \Psi\colon [-1, 1] \to R$$

mit

$$\Phi(-1) = A,\ \Phi(1) = B,\ \Psi(-1) = C,\ \Psi(1) = D.$$

(Statt des Parameterintervalls $[-1, 1]$ hätte man jedes andere Intervall $[a, b]$ nehmen können, die Wahl $[-1, 1]$ erweist sich jedoch als besonders praktisch.)

Wir schreiben

$$\Phi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s)), \quad \Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)).$$

Setze $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ und definiere eine stetige (!) Abbildung

$$G\colon Q \to \mathbb{R}^2, \quad G(s, t) = (\psi_1(t) - \varphi_1(s), \varphi_2(s) - \psi_2(t)).$$

Würden sich die Kurven nie schneiden, würde G nie den Wert $(0, 0)$ annehmen. Setzen wir für $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(p) = \max\{|x|, |y|\},$$

könnten wir dann die stetige (!) Abbildung

$$F\colon Q \to \mathbb{R}^2, \quad F(s, t) = \frac{G(s, t)}{N(G(s, t))}$$

bilden. Diese bildet nach Konstruktion das Quadrat Q in sich ab, genauer bildet sie Q in seinen Rand ab (warum?). Sei nun p ein Fixpunkt von F, der nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz ja existiert. Dann liegt $p = F(p)$

[1] Das soll hier nicht verifiziert werden; ich verweise nur auf die auf Seite 10 wiedergegebene Philosophie, wonach explizit durch Formeln definierte Abbildungen stetig sind.

auf dem Rand von Q, und mindestens eine Koordinate von p ist 1 oder -1. Nehmen wir an, p hat die Form $(1, \tau)$ (die übrigen Fälle sind analog zu behandeln). Dann ist $F(1, \tau) = (1, \tau)$, und das impliziert

$$\psi_1(\tau) - \varphi_1(1) = N(G(1, \tau)) = \max\{|\psi_1(\tau) - \varphi_1(1)|, |\varphi_2(1) - \psi_2(\tau)|\} \geq 0.$$

Aber andererseits ist

$$\psi_1(\tau) - \varphi_1(1) \leq 0,$$

da $\Psi(\tau) \in R$ und $\Phi(1) = B$, was auf dem rechten Rand von R liegt. Daraus folgt $N(G(1, \tau)) = 0$ im Widerspruch dazu, dass G nach unserer Annahme nie den Wert $(0, 0)$ annimmt.

Die Annahme, dass sich die beiden Kurven nicht schneiden, ist zum Widerspruch geführt, und die Existenz eines Schnittpunkts ist bewiesen.

6. Aufgaben

Aufgabe 6.1. Wer war Banach? Wer war Brouwer?

Aufgabe 6.2. Finden Sie Beispiele für Abbildungen $F\colon [0, 1] \to [0, 1]$ bzw. $F\colon [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ ohne Fixpunkte.

Aufgabe 6.3. Sei $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ eine Abbildung. Was sind die Fixpunkte der durch

$$F\colon [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1], \quad F(x, y) = (x, f(x))$$

definierten Abbildung?

Aufgabe 6.4. Zeigen Sie, dass

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y, \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 6.5. Zeigen Sie, dass

$$d_1(p, p') = |x - x'| + |y - y'|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert. (Hier ist $p = (x, y)$, $p' = (x', y')$.) Sie wird manchmal *Manhattan-Metrik* genannt. Warum wohl?

Aufgabe 6.6. Zeigen Sie die im Beweis von Lemma 2.3 verwendete Ungleichung

$$d(p_n, p) \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Aufgabe 6.7. Sei $F_a\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $F_a(x) = x^2$, wobei $a > 0$ ist. Bestimmen Sie diejenigen a, für die F_a eine Kontraktion ist, und bestimmen Sie diejenigen a, für die F_a das Intervall $[0, a]$ in sich abbildet.

Aufgabe 6.8. Ist die Kosinusfunktion als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Kontraktion? Und als Funktion von $[-1, 1]$ nach $[-1, 1]$?

Aufgabe 6.9. Geben Sie Beispiele für Abbildungen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die

$$|F(x) - F(x')| \leq |x - x'| \qquad \text{für } x, x' \in \mathbb{R}$$

erfüllen und keine bzw. unendlich viele Fixpunkte haben.

Aufgabe 6.10. Um $\sqrt{2}$ zu approximieren, rate man eine Näherung x_0. Wenn x_0 zu groß (bzw. zu klein) war, ist $2/x_0$ zu klein (bzw. zu groß). Daher hat

$$x_1 = \frac{x_0 + 2/x_0}{2}$$

gute Chancen, eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$ zu sein als x_0. Diese Idee legt es nahe, die Funktion

$$F(x) = \frac{x + 2/x}{2}$$

zu iterieren. Zeigen Sie:

(a) F bildet $[1, \infty)$ in sich ab und ist dort eine Kontraktion.

(b) $\sqrt{2}$ ist der eindeutig bestimmte Fixpunkt von F in diesem Intervall.

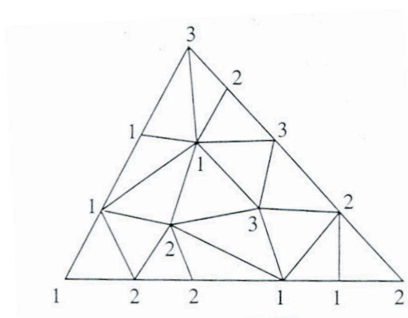
(c) Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ die ersten Glieder der Iterationsfolge $x_{n+1} = F(x_n)$, und vergleichen Sie die tatsächliche Genauigkeit der Approximation mit der durch (3.2) garantierten.

Aufgabe 6.11. Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) = \frac{x + 2/x}{2}$$

aus der vorherigen Aufgabe, aber mit Definitionsbereich $A = [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ ($\subset M = \mathbb{Q}$). Benutzen Sie dieses Beispiel, um zu zeigen, dass der Banachsche Fixpunktsatz nicht zu gelten braucht, wenn der metrische Raum M nicht als vollständig vorausgesetzt ist.

Aufgabe 6.12. (Spernersches Lemma für ein Dreieck)
Gegeben sei ein Dreieck, dessen Eckpunkte mit den Farben 1, 2 und 3 gefärbt sind. Das Dreieck wird in Teildreiecke zerlegt, so dass je zwei Teildreiecke entweder keinen Punkt gemeinsam haben, je einen Eckpunkt gemeinsam haben oder je eine Seite gemeinsam haben. Alle Eckpunkte der Teildreiecke werden nun mit einer der drei Farben gefärbt, und zwar so, dass auf den Außenseiten nur die Farben der entsprechenden Eckpunkte des großen Dreiecks auftauchen.



Zeigen Sie, dass es mindestens ein dreifarbiges Teildreieck gibt.

Aufgabe 6.13. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ mit Definitionsbereich $[0, \infty)$ ist stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Aufgabe 6.14. Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung r von einem Quadrat Q auf seinen Rand ∂Q mit $r(p) = p$ auf ∂Q gibt. [Tipp: Falls doch, konstruieren Sie eine fixpunktfreie Abbildung auf Q.]

Aufgabe 6.15. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ hat die *Fixpunkteigenschaft*, wenn jede stetige Abbildung $F \colon A \to A$ einen Fixpunkt besitzt. Zeigen Sie, dass ein Kreisring nicht die Fixpunkteigenschaft hat.

Aufgabe 6.16. Sei $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$; dann heißt B ein *Retrakt* von A, wenn es eine stetige Abbildung $r \colon A \to B$ mit $r(p) = p$ auf B gibt. Zeigen Sie: Wenn A die Fixpunkteigenschaft (siehe die vorherige Aufgabe) hat und B ein Retrakt von A ist, hat auch B die Fixpunkteigenschaft.

Aufgabe 6.17. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= e^{-xy} \\ y &= \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.

Aufgabe 6.18. Führen Sie die übrigen Fälle im Beweis auf Seite 14 aus; d.h. falls der Fixpunkt p die Form $(-1, \tau)$, $(\sigma, 1)$ oder $(\sigma, -1)$ hat.

Literatur

Zwei schlanke Bücher (auf englisch), die zu dieser Vorlesungsreihe passen, sind:

Yu. A. Shashkin: *Fixed Points.* American Mathematical Society 1991.

N. Ya. Vilenkin: *Method of Successive Approximations.* Mir Publishers Moscow 1979.

Dem Buch von Shashkin sind die Skizzen im Text entnommen.

FB Mathematik, Freie Universität Berlin, Arnimallee 6, D-14 195 Berlin
e-mail: werner@math.fu-berlin.de