2. Nachklausur Funktionentheorie (27.9.2017)

Aufgabe 2.1. Sei $f(z) := \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$. Berechnen Sie die Integrale (a) $\int_\gamma f(z)\,dz$, (b) $\int_\gamma f'(z)\,dz$ und (c) $\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz$, wobei γ den geschlossenen Weg entlang $\partial B_2(0)$ bezeichnet.

Lösung: (a) $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \operatorname{res}(f,i) + \operatorname{res}(f,-i) = 1+1 = 2$.
(b) f' hat in $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ eine Stammfunktion, also sind alle geschlossenen Integrale Null. (Alternativ kann man mit $\operatorname{res}(f',\bullet) = 0$ argumentieren.)
(c) $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz = 1-2 = -1$, da dieses Integral die Null- und Polstellen von f zählt. Die Polstellen sind offensichtlich – und die Nullstellen sind es in $f(z) = \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{(z+i)(z-i)} = \frac{2z}{z^2+1}$ dann auch.

Mit dieser Darstellung von f sieht man, dass das Integral in (a) auch Nullstellen zählt. Und zwar die von z^2+1.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie, daß es keine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $|f| \geq 3$ und $f(-1) = -5$ und $f(1) = 5$.

Lösung: Dann wäre $1/f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch ganz, und wegen $|1/f| \leq 3$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville wäre dann $1/f$, also auch f konstant.
Alternativ würde ein nicht-konstantes f der Tatsache widersprechen, daß das Bild ganzer Funktionen dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2.3. Wieviele Lösungen hat die Gleichung $z^5+iz^3-4z+i = 0$ im Kreisring $\mathcal{R}(1,2) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?

Lösung: Bezeichne $f(z) := z^5 + iz^3 - 4z + i$. Wir untersuchen zunächst $B_1(0)$:
Falls $|z| = 1$, so ist $|z^5 + iz^3 + i| \leq 3 < 4 = |4z|$. Aus dem Satz von Rouché folgt also, daß $\#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } B_1(0)\} = \#\{\text{Nullstellen von } 4z \text{ in } B_1(0)\} = 1$.
Analog folgt für $|z| = 2$ die Ungleichung $|z^5| = 32 > 17 = 8+8+1 \geq |iz^3 - 4z + i|$. Daraus ergibt sich nach Rouché $\#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } B_2(0)\} = \#\{\text{Nullstellen von } z^5 \text{ in } B_2(0)\} = 5$.
Auf den Rändern gibt es (wegen der obigen Ungleichungen) auch keine Nullstellen. Für den Kreisring $\mathcal{R}(1,2)$ ergibt sich damit die Differenz $5-1 = 4$ als die gesuchte Anzahl.

Aufgabe 2.4. Berechnen Sie $\operatorname{res}(\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}, p)$ für alle Polstellen $p \in \mathbb{C}$ und zeigen Sie, daß diese Residuen reell sind.

Lösung: Sei $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$. Für den einfachen Pol $p = i$ erhalten wir $\operatorname{res}(f,i)$ durch Einsetzen von i in $(z-i)\cdot f$ (nach Beheben der Singularität), also $\operatorname{res}(f,i) = \frac{1}{(i+i)(i-1)^2} = \frac{1}{4}$. Analog erhalten wir $\operatorname{res}(f,-i) = \frac{1}{(-i-i)(-i-1)^2} = \frac{1}{4}$.
Für den zweifachen Pol $p = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten:
(a) Mit $g(z) := (z-1)^2 \cdot f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ergibt sich $\operatorname{res}(f,1) = g'(1) = \frac{-2z}{(z^2+1)^2}(1) = -\frac{1}{2}$.
(b) Wir benutzen den Residuensatz und berechnen für $r \gg 0$ das Integral

$$\int_{\partial B_r(0)} f(z)\,dz = \int_{\partial B_{1/r}(\infty)} f(1/w)\,d(1/w) = \int_{\partial B_{1/r}(\infty)} \frac{-w^2\,dw}{(1+w^2)(1-w)^2} = 0.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit daraus, daß der Integrand in ∞ (also für $w = 0$) holomorph ist – und wir den Kreis (mit $r \gg 0$) hinreichend klein machen können.

Aufgabe 2.5. Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(g(z)) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß dann f oder g konstant sein müssen.

Lösung: Wenn g nicht konstant ist, dann ist g eine offene Abbildung (Satz von der Gebietstreue). Dann enthält $g(\mathbb{C})$ also eine nichtleere, offene Menge U, und es folgt $f|_U \equiv 0$. Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt dann aber $f \equiv 0$, d.h. f ist konstant.

Aufgabe 2.6. Sei $f(z) := \exp(\frac{1}{z})/z^2$; diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}^*$. Untersuchen Sie, ob $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen Kurven $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ gilt.

Lösung: Methode 1: Wir berechnen die Laurentreihe von f. Die Reihe für exp ist $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} z^n/n!$, also ist $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-n-2}/n! = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots$. Damit sehen wir, daß $\operatorname{res}(f, 0) = 0$ ist.

Methode 2: Die Funktion $-f$ besitzt mit $\exp(1/z)$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$.

Aufgabe 2.7. a) Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\wp$ die zugehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Man zeige, daß $\wp$ keine Periode $c \in \mathbb{C} \setminus L$ besitzt.

b) Geben Sie eine L-periodische meromorphe Funktion an, die genau drei verschiedene (einfache) Polstellen in $\mathbb{C}/L$ hat.

Lösung: (a) Falls c eine Periode von $\wp$ ist, dann muß mit 0 auch c eine Polstelle von $\wp$ sein. Das widerspricht aber der Tatsache, daß alle Polstellen von $\wp$ in L liegen.

(b) $f(z) := 1/\wp'(z)$ erfüllt das, da die Nullstellen von $\wp'$ die drei Punkte aus $\frac{1}{2}L \setminus L$ sind.