1. Abschluss-Klausur Funktionentheorie (19.7.2017)

Aufgabe 1.1. a) Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma_r} \overline{z}\,dz$ in Abhängigkeit von $r > 0$, wobei γ_r der geschlossene Weg ist, der $1 \in \mathbb{C}$ entlang des Randes $\partial B_r(1)$ im Abstand r umrundet.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} \exp(\exp(z) + z^3 - 1)\,dz$.

Lösung: (a) $\gamma_r(t) = 1 + r\,\exp(2\pi i t)$, also ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{(1 + r\,\exp(2\pi i t))} \cdot 2\pi i r \exp(2\pi i t)\,dt \\
&= 2\pi i r \cdot \int_0^1 (1 + r\,\exp(-2\pi i t))\,\exp(2\pi i t)\,dt \\
&= 2\pi i r \cdot \int_0^1 (\exp(2\pi i t) + r))\,dt \\
&= 2\pi i r \cdot \left([\tfrac{1}{2\pi i}\exp(2\pi i t)]_0^1 + [rt]_0^1\right) = 2\pi i r^2.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:
$\int_{\gamma_r} \overline{z}\,dz = \int_{\partial B_r(0)} (1 + \overline{z})\,dz = \int_{\partial B_r(0)} \overline{z}\,dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{r^2}{z}\,dz = 2\pi i r^2.$

(b) Der Integrand ist holomorph in $\mathbb{C}$, also ist das Integral gleich 0.

Aufgabe 1.2. Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. f habe eine Singularität in 0. Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{C}$ hat $g(z) := f(z) - \lambda/z$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$?

Lösung: Genau für $\lambda = \operatorname{res}(f, 0)$, denn genau für dieses λ verschwindet das Integral $\int_{\partial B_1(0)} g(z)\,dz$.

Aufgabe 1.3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so daß es für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = g(z)^2$ (also $g = \sqrt{f}$) gibt. Folgt daraus dann auch die Existenz einer holomorphen Funktion $h : G \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = h(z)^3$ (also $h = \sqrt[3]{f}$)?

Lösung: Die Voraussetzung sagt, daß G ein spezielles Gebiet ist, und daraus folgt, daß es ein Elementargebiet ist. Für dieses existiert aber dann auch $\log(f)$ und damit auch alle Wurzeln.

Aufgabe 1.4. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $2z^4 - 5z + 2 = 0$ (a) innerhalb von $B_1(0)$, (b) auf dem Rand $\partial B_1(0)$ und (c) in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$. Sind Mehrfachnullstellen darunter?

Lösung: Auf $\partial B_1(0)$ gilt $|5z| = 5$ und $|2z^4 + 2| \leq 4$. Damit kann $5z - (2z^4 + 2)$ dort keine Nullstelle haben. Nach dem Satz von Rouché ist dann $\#\{\text{Nullstellen von } 5z - (2z^4 + 2) \text{ in } B_1(0)\} = \#\{\text{Nullstellen von } 5z \text{ in } B_1(0)\} = 1$. Damit liegen genau drei Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$.
Mehrfachnullstellen $\alpha \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ implizieren $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Hier wäre also $8\alpha^3 = 5$, d.h. $8\alpha^4 = 5\alpha$, und wir können das in $4 \cdot (2\alpha^4 - 5\alpha + 2) = 0$ einsetzen. Das ergibt $5\alpha - 20\alpha + 8 = 0$, also $\alpha = 8/15$. Das erfüllt aber nicht die Gleichung $8\alpha^3 = 5$ (sonst wäre $8^4 = 3^3 \cdot 5^4$).
Alternativ kann man argumentieren, daß $\alpha = \sqrt[3]{5/8} \in B_1(0)$ ist, aber daß es in diesem Bereich sowieso nur eine Nullstelle gibt.

Aufgabe 1.5. a) Berechnen Sie $\operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)-1}, p)$ für alle Polstellen $p \in \mathbb{C}$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)+1}, q)$ für alle Polstellen $q \in \mathbb{C}$.

Lösung: (a) Die Polstellen sind $p_k = 2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da die Funktion $\frac{1}{\exp(z)-1}$ 2π-periodisch ist, genügt es, das Residuum in 0 auszurechnen. Hier gilt $\frac{1}{\exp(z)-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\sum_{n\geq 0} z^n/(n+1)!}$. Der zweite Faktor ist eine in 0 holomorphe Funktion $h(z)$ mit $h(0) = 1$. Deshalb ist $\operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)-1}, 2k\pi i) = \operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)-1}, 0) = 1$.

(b) Die Polstellen sind $q_k = (2k+1)\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Der Grenzwert der Funktion $g_k(z) := \frac{z-q_k}{\exp(z)+1}$ für $z \to q_k$ kann mit der Regel von l'Hospital ausgerechnet werden: $\Rightarrow \lim_{z\to q_k} \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{\exp(q_k)} = -1$.
Ein alternativer Zugang zu (b) ist der folgende: $\Phi_k : z \mapsto z + (2k+1)\pi i$ ist biholomorph, es gilt $\Phi_k(0) = q_k$, und für die Funktion $f(z) := \frac{1}{\exp(z)+1}$ folgt $(f \circ \Phi)(z) = \frac{-1}{\exp(z)-1}$. Damit gilt $\operatorname{res}(f, q_k) = \operatorname{res}(f, \Phi_k(0)) = \operatorname{res}(f \circ \Phi_k, 0) = -1$ wegen (a).
Ein alternativer und recht cooler Zugang zu (a+b) ist die Berechnung der Residuen, ohne die Polstellen zu identifizieren: Für $f(z) = h(z)/g(z)$, so daß g eine einfache Nullstelle in p hat und beide g, h holomorph sind, gilt $\operatorname{res}(f, p) = h(p)/g'(p)$. In (a+b) sei $h(z) = 1$ und $g(z) = \exp(z) \pm 1$, und man erhält $h(z)/g'(z) = 1/\exp(z)$. Wenn z eine Polstelle ist, so muß aber $g(z) = 0$ gelten, d.h. $\exp(z) = \mp 1$.

Aufgabe 1.6. a) Man entscheide, ob es eine in $\mathbb{B} := B_1(0)$ holomorphe Abbildung f gibt mit $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ (Beweis/Beispiel).

b) Man entscheide, ob es eine in $\mathbb{B} := B_1(0)$ holomorphe Abbildung g gibt mit $g^{(n)}(0) = n!/n^2$ (Beweis/Beispiel).

Lösung: Wenn $h : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann muß $h(z) = \sum_{n\geq 0} h^{(n)}(0)/n! \cdot z^n$ eine in $\mathbb{B}$ konvergente Potenzreihe sein, d.h. der Konvergenzradius muß mindestens 1 sein.

(a) Aus $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ folgt dann also $f(z) = \sum_{n\geq 0} n! \cdot z^n$, aber diese Potenzreihe hat Konvergenzradius 0. Es gibt dieses f also nicht.

(b) Aus $g^{(n)}(0) = n!/n^2$ folgt $g(z) = \sum_{n\geq 0} 1/n^2 z^n$, und diese Potenzreihe hat Konvergenzradius 1 (wie $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$) – man erhält das entweder über ein Argument über die zweite Ableitung von $\frac{1}{1-z}$, oder über $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$. Diese Reihe definiert also wirklich eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 1.7. Mit $f(z) := \sin(\frac{1}{z})$ erhalten wir eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$. Untersuchen Sie, ob die Singularität in 0 hebbar, ein Pol oder eine wesentliche Singularität ist. Geben Sie dafür wenigstens *zwei* voneinander wesentlich verschiedene Begründungen.

Lösung: Methode 1: Wir berechnen die Laurentreihe von f. Die Reihe für sin ist $\sin(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, und daraus folgt $f(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n 1/(2n+1)! \cdot z^{-(2n+1)}$. Die Laurentreihe bricht also nicht ab, d.h. die Singularität ist wesentlich.

Methode 2: Wegen $f(1/\pi k) = 0$ und $f(1/(\pi k + \pi/2)) = 1$ existiert $\lim_{z \to 0} f(z)$ nicht (er ist auch nicht ∞). Deshalb ist die Singularität wesentlich.