FUNKTIONENTHEORIE
(VORLESUNG SS 2017, FU BERLIN) 28. September 2017

KLAUS ALTMANN

.

1. Grundlagen und Wiederholungen

19.4.17 (1)

1.1. **Komplexe Zahlen.** $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit Multiplikation $\boxed{i^2 := -1}$, also $\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$. Mit $z := a + bi$ sei $\overline{z} := a - bi$ (Automorphismus aus $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$); für $z \neq 0$ gilt dann $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$, d.h. $1/z = \overline{z}/|z|^2 \in \mathbb{C}$.

Polarkoordinaten: Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ läßt sich eindeutig zerlegen in $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ mit $\arg(z) := \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ($\rightsquigarrow$ nicht-stetiger ,,Hauptzweig“ $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$). Multiplikation in $\mathbb{C}$: Die Argumente addieren sich (Additionstheoreme). Die n-ten Einheitswurzeln sind damit $\xi_n^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

In $\mathbb{C}$ geht die Ordnungsrelation verloren; Visualisierung mittels “Gausssschen Zahlenebene”. Die Topologie wird von $\mathbb{R}^2$ übernommen; Euklidische Metrik $d(z, w) := |w - z|$; Dreiecksungleichung $\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}$; Kreisscheiben $B_R(z) \subset \mathbb{C}$ ($U \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnen im Skript immer offene Mengen). Die Zerlegung $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_{>0} \times (S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist ein Homöomorphismus.

24.4.17 (2)

Die stereographische Projektion $p : S^2 \setminus \{N := (0,0,1)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, $P \mapsto \overline{NP} \cap (\bullet, \bullet, 0)$, also $p : (x, y, h) \mapsto \frac{1}{1-h}(x + iy)$ ist ebenfalls ein Homöomorphismus.

1.2. **Folgen und Reihen.** Konvergenzbegriffe mittels obiger Metrik; absolute Konvergenz impliziert Konvergenz ($\triangle$-Ungleichung); Umordnungssätze:

Satz 1. 1) *$\sum_{n=0}^\infty a_n = s$ absolut konvergent, $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ Bijektion $\Rightarrow \sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)} = s$.*

2) *$\tau : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Bijektion. Dann ist $\sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty a_{ij}$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^\infty a_{\tau(n)}$ ist absolut konvergent. In diesem Fall sind beide Summen gleich.*

3) *Seien $\sum_{i=0}^\infty a_i = s$ und $\sum_{j=0}^\infty b_j = t$ absolut konvergent $\Rightarrow$ das Cauchy-Produkt ist $\sum_{n=0}^\infty \sum_{i+j=n} a_i b_j = st$ ist auch absolut konvergent.*

1.3. **Potenzreihen.** (Lokal) gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen oder -reihen; diese impliziert gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen. $a_n \in \mathbb{C} \rightsquigarrow$ Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Oberer Grenzwert $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n \in \mathbb{R}) := \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n \mid n \geq k\}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Konvergenzradius}}$ $R := (\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ $(0 \leq R \leq \infty$, “Hadamardsche Formel”):

Satz 2. 1) *Für jedes* $z \in B_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ *konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *absolut; die Grenzwerte liefern eine stetige Funktion* $f \in \mathcal{C}(B_R(0), \mathbb{C})$.

2) *Für jedes* $r < R$ *konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf* $\overline{B}_r(0) \subseteq \mathbb{C}$.

3) *Für jede* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$ *divergiert die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Proof. Alles folgt aus dem Wurzelkriterium: $r < R \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n r^n|} < 1$, also $\sqrt[n]{|a_n r^n|} < \theta < 1$ für $n \gg 0$. Falls aber $|z| > R$, so ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$, d.h. $\sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$ für unendlich viele n, d.h. $a_n z^n \not\to 0$. $\square$

Bemerkung. Falls $q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existiert, so gilt $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (also $1/q$ ist dann der Konvergenzradius): Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß $\forall k \geq 0:$ $(q-\varepsilon)^k |a_N| < |a_{N+k}| < (q+\varepsilon)^k |a_N|$. Aber $\sqrt[N+k]{(q \pm \varepsilon)^k |a_N|} \to (q \pm \varepsilon)$ für $k \to \infty$.

Beispiele: $f_0 = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$, $f_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ und $f_2 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ konvergieren auf $\partial B_{R=1}(0)$ nirgends (f_0), oder manchmal (f_1 für $z = \pm 1$), oder überall (f_2).

1.4. **Klassische Funktionen.** $e^z := \boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!}$ (absolut konvergent nach Quotientenkriterium für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. Konvergenzradius $R = \infty$) erfüllt $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ (Cauchy-Produkt und binomischer Satz); $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist also ein stetiger Gruppen-Homomorphismus, und die Potenzreihe konvergiert auf allen kompakten $K \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig.

Weiter definieren wir $\sin(z) := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$ und $\cos(z) := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}$ (ebenfalls $R = \infty$); das impliziert $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)}$ für $\theta \in \mathbb{C}$. 26.4.17 (3)

Umgekehrt folgt $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ und $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, d.h. insbesondere auch $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$. Für $\theta \in \mathbb{R}$ ist also $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta) \in \mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}$ (entspricht $S^1 \subset \mathbb{R}^2$), insbesondere $e^{i\pi} = -1$. Nach (1.1) lässt sich dann jedes $z \in \mathbb{C}^*$ eindeutig als $\boxed{z = |z| \cdot e^{i \arg(z)}}$ schreiben. Damit ist $\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \arg(z) + 2\pi i k/n} \mid k = 1, \ldots n\}$.

Der Homomorphismus $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist also surjektiv mit $\ker(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$. Der „Hauptzweig" der Umkehrabbildung $\boxed{\log}$ ist die genau in $\mathbb{R}_{<0}$ nicht stetige Bijektion $\log : \mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$ (horizontaler Streifen), $w \mapsto \log|w| + i \arg(w)$.

Potenzfunktionen: $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow z^a := \exp(a \cdot \log z)$ ist nur für $a \in \mathbb{Z}$ einblättrig; für (z.B.) $a = 1/n$ ist sie n-blättrig. Und für $a, b \in \mathbb{C}$ ist i.a. $(z^a)^b \neq z^{ab}$.
Beispiel: $e = e^{1+2\pi i} \not\Rightarrow e = e^{(1+2\pi i)^2} = e^{1+4\pi i - 4\pi^2} = e^{-4\pi^2}$.

1.5. $\mathbb{C}$ **ist algebraisch abgeschlossen.** In $\mathbb{C}$ gibt es alle n-ten Wurzeln, siehe (1.4).

Theorem 3. $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ *mit* $\deg(f) \geq 1 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}$: $f(c) = 0$.

Proof. Sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ mit $a_{n\geq 1} \neq 0$. Dann ist $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N}$: $|f(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0))| \geq f(0)$, d.h. $\exists \min |f(\mathbb{C})| = \min f(\overline{B}_R(0))$. O.B.d.A. werde dieses Minimum in $z = 0$ angenommen, sei also $|f(\mathbb{C})| \geq |f(0)| = |a_0| > 0$.

Falls $a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$, aber $a_k \neq 0$, dann setzen wir $z(t) := \sqrt[k]{-t \cdot \frac{a_0}{a_k}}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Unter $t \to 0$ konvergieren $a_\nu\, z(t)^\nu \to 0$ für $\nu > k$ schneller als $\big(a_k\, z(t)^k + a_0\big) = (1-t)\, a_0 \to a_0$. Wegen $|1-t| < 1$ ist dann also $|f(z(t)| < |a_0|$ für $t \ll 1$. $\square$

2. Differenzierbarkeit und Holomorphie

2.1. **Reelle Differenzierbarkeit.** $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x \in U$ (total) differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $f(x+h) = f(x) + f'(x)\, h + r(h)$ mit $f'(x) \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $\lim_{h\to 0} r(h)/\|h\| = 0$ ($\rightsquigarrow$ Stetigkeit!). Als Matrix ist $f'(x) = \big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\big)_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$.

Seien $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ jeweils in $x \in \mathbb{R}^n$ und $y = f(x)$ differenzierbar, dann ist gf in x differenzierbar mit $(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x)$ $\boxed{\text{Kettenregel}}$.

Das ist auch auf $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ anwendbar: Mit $z = x + iy$ und $f_{\mathbb{R}} = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) = (u, v)$ ist die reelle Ableitung $f'_{\mathbb{R}}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Wir schreiben $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. *Basiswechsel*: $z = x + iy$ und $\overline{z} = x - iy$ implizieren $\boxed{dz := dx + i\, dy \text{ und } d\overline{z} := dx - i\, dy}$, also

$$\begin{pmatrix} dz \\ d\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Da sich $\{\partial_x, \partial_y\}$ wie die zu $\{dx, dy\}$ duale Basis verhält, motiviert das folgende Definition („Wirtinger-Ableitungen“):

$$\begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_{\overline{z}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1\,T} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix},$$

3.5.17 (4) also $\boxed{\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \text{ und } \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)}$. Damit gilt $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}}$.

Beispiele: $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$.

2.2. **Die komplexe Ableitung.** $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt in z (komplex) differenzierbar mit Ableitung $f'(z) \in \mathbb{C}$ $:\Leftrightarrow$ $f(z+h) = f(z) + f'(z)\, h + r(h)$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{h\to 0} r(h)/|h| = 0$ (oder $\lim_{h\to 0} r(h)/h = 0$).

f heißt $\boxed{\text{holomorph}}$ in z, falls es in einer Umgebung von z differenzierbar ist.

Beispiele: $f := \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und $f := 1$ sind holomorph; für (komplex) differenzierbare f, g gelten die üblichen Ableitungsregeln $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ (falls $g \neq 0$) und die Kettenregel (alles analog zu $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, oder man benutze Satz 5). Damit sind alle $f \in \mathbb{C}[z]$ holomorph (mit $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$).

Die Abbildungen $z \mapsto \overline{z}$ oder $z \mapsto |z|^2$ oder Re, Im sind *nicht* komplex differenzierbar: Für erstere folgt das aus $\nexists \lim_{h\to 0} \overline{h}/h \in \mathbb{C}$ (vergleiche $h \in \mathbb{R}$ und $h \in i\,\mathbb{R}$).

Satz 4. *Seien $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ ($U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen) mit $gf = \mathrm{id}_U$. Sei f stetig in $a \in U$ und g (komplex) differenzierbar in $b = f(a)$ mit $g'(b) \neq 0$. Dann ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = 1/g'(b)$.*

Proof. $[z_n \to a] \Rightarrow [w_n := f(z_n) \to f(a) = b]$. Also $\frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a} = \frac{w_n-b}{g(w_n)-g(b)} \to \frac{1}{g'(b)}$. □

Insbesondere ist $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\log'(z) = 1/z$.

2.3. **Die** Cauchy-Riemannschen **Differentialgleichungen.** Der Unterschied zwischen der reellen (2.1) und der komplexen (2.2) Differenzierbarkeit kann genau benannt werden:

Satz 5 (CR-Dgl)**.** *Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z \in U$. Dann sind äquivalent:*
(i) *f ist in z komplex differenzierbar,*
(ii) *f ist in z reell differenzierbar mit $f'(z) \in \mathbb{C} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$* (i.e. $\mathbb{C}$-linear),
(iii) *$f = (u, v)$ ist in z reell differenzierbar mit $\partial_x u - \partial_y v = \partial_x v + \partial_y u = 0$ und*
(iv) *f ist in z reell differenzierbar mit $\partial_{\overline{z}} f = 0$ ($\rightsquigarrow f'(z) = \partial_z f(z)$).*

Proof. [(i) $\Leftrightarrow$ (ii)] folgt aus der Definition; [(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)] folgt aus Aufgabe 1.4, und [(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)] folgt aus (2.1): $(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = (\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u)$. In diesem Fall ist dann $\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = \partial_x u + i\partial_x v = f'(z)$. □

2.4. **Ableitung von Potenzreihen.** Diese kann für alle Summanden separat gebildet werden, und der Konvergenzradius bleibt dabei erhalten.

Satz 6. *Die Konvergenzradien von $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ und*

$$g(x) \;=\; \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, a_{m+1}\, x^m$$

sind gleich, und es gilt $g = f'$. Insbesondere sind Potenzreihen unendlich oft differenzierbar mit $f^{(\ell)}(x) = \sum_{n=\ell}^{\infty} n \cdot \ldots \cdot (n - \ell + 1)\, a_n\, x^{n-\ell}$. Speziell gilt $f^{(\ell)}(0) = \ell! \cdot a_\ell$.

Proof. (i) Für $b_n, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $b_n \to b$ gilt $\overline{\lim}\,(b_n\, c_n) = b \cdot \overline{\lim}\, b_n$. Damit folgt wegen $R^{-1} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ der Konvergenzradius für g aus $\sqrt[n]{n} \to 1$ ($x^x \uparrow 1$ für $x \downarrow 0$).

(ii) $S_k := \sum_{n=0}^{k} a_n\, x^n$ und $R_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\, x^n$, und seien $z_m \to z \in B_r(0)$ mit $r < R$. Dann ist

$$\left|\tfrac{f(z_m)-f(z)}{z_m-z} - S_k'(z)\right| \leq \left|\tfrac{S_k(z_m)-S_k(z)}{z_m-z} - S_k'(z)\right| + \left|\tfrac{R_k(z_m)-R_k(z)}{z_m-z}\right|,$$

und der zweite Summand ist $\left|\sum_{n\geq k+1} a_n \frac{z_m^n - z^n}{z_m - z}\right| \leq \sum_{n \geq k+1} |a_n|\, n\, r^{n-1}$. Dann $k \gg 0$ wählen und damit den ersten Summanden abschätzen. □

3. Integration in $\mathbb{C}$

3.1. **Wegintegrale.** Wege in einem topologischen Raum X sind stetige $\gamma : [a,b] \to X$; Rückweg $(-\gamma) : [b,a] \to X$; Verknüpfung $(\gamma_1 * \gamma_2)$ von $\gamma_1 : [a,b] \to X$ $\gamma_2 : [b,c] \to X$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Mögliche Zusatz-Eigenschaften: geschlossen $(\gamma(a) = \gamma(b))$, glatt, stückweise glatt (bei $X = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$). Kurvenlänge $\boxed{L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$ ist additiv bzgl. $*$, und es gilt $L(-\gamma) = L(\gamma)$. 8.5.17 (5)

Seien Wege $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ immer als $\boxed{\text{stückweise glatt}}$ voraussgesetzt; $f : U \to \mathbb{C}$ stetig $\rightsquigarrow \gamma^*(f) := f \circ \gamma$, und das wird ,,vertauschbar mit dem Differential d":

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz} := \int_a^b \gamma^*\big[f(z)\, dz\big] = \int_a^b (\gamma^* f)\, d(\gamma^* z) = \int_a^b (f \circ \gamma)\, d(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Bemerkung: Wegintegral im $\mathbb{R}^n$: $\int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$, d.h. Multiplikation mit der *Länge* des Tangentialvektors $\gamma'(t)$ statt mit $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ selbst. Beides sind die Grenzwerte der entsprechenden Approximation mittels Streckenzüge.

Eigenschaften: $\int_\gamma$ ist $\mathbb{C}$-linear, es verallgemeinert das Riemann-Integral ($\gamma = \mathrm{id}$), und es gilt $|\int_\gamma f(z)\, dz| \le L(\gamma) \cdot \sup |f(\gamma)|$. Additivität bzgl. $(\gamma_1 * \gamma_2)$ und $\int_{-\gamma} = -\int_\gamma$. Für gleichmäßig konvergente $f_n \to f$ folgt $\int_\gamma f_n\, dz \to \int_\gamma f dz$.

Beispiel: $\gamma(t) := e^{2\pi i t} \Rightarrow$ für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\int_{S^1} z^n\, dz = 2\pi i \cdot \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) t}\, dt = 2\pi i \cdot \delta_{n,-1}$. (Geschlossene Kurven, wie S^1, nehmen wir immer als ,,positiv orientiert" an.)

Umparametrisierung: Sei $\varphi : [a', b'] \to [a,b]$ stetig und stückweise differenzierbar (in $\mathbb{R}$) mit $\varphi(a') = a$ und $\varphi(b') = b$. Dann gilt $\boxed{\int_{\gamma\circ\varphi} = \int_\gamma}$ (folgt aus der Kettenregel $(\gamma\varphi)'(t)\, dt = \gamma'(\varphi(t))\, d\varphi$). Falls zusätzlich $\varphi' \ge 0$, so gilt auch $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.

3.2. **Gebiete.** Topologische Räume X heißen *zusammenhängend* $:\Leftrightarrow$ $\emptyset$ und X sind die einzigen Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind. X heißt *Weg-zusammenhängend* $:\Leftrightarrow$ alle $x, x' \in X$ sind mittels Wegen $\gamma : [0,1] \to X$ verbunden.

10.5.17 (6) **Satz 7.** *Ein offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ ist zushgd $\Leftrightarrow$ Weg-zushgd* (,,Gebiet").

Proof. ($\Rightarrow$) Fixiere $x \in U \Rightarrow Y := \{x' \in U \mid \exists \gamma : x \rightsquigarrow x'\} =$ offen/abgeschlossen. ☐

Lemma 8. *Sei $F : B_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = 0$. Dann ist F konstant.*

Proof. Für $z \in B_r(0)$ betrachten wir $\varphi(t) := F(tz)$ auf $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Es gilt $\varphi'(t) = F'(tz) \cdot z = 0$, also ist φ konstant. (Oder man argumentiert mit $\partial_x(F)$ und $\partial_y(F)$.) ☐

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Ein holomorphes $F : G \to \mathbb{C}$ heißt $\boxed{\textit{Stammfunktion}}$ von $f :\Leftrightarrow F' = f$. Dieses ist, wenn sie existiert, bis auf die Addition von Konstanten eindeutig (folgt aus Lemma 8 analog zum Beweis von Satz 7).

3.3. **Weg(un)abhängigkeit der Integrale.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dort gilt der folgende „Hauptsatz der komplexen Differential- und Integralrechnung“:

Satz 9. *Ein stetiges $f : G \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion $F \Leftrightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$ für alle geschlossenen Wege $\gamma : [0,1] \to G$. Dann gilt $\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ für allgemeine* (nicht notwendig geschlossene) *Wege $\gamma : [a,b] \to G$.*

Proof. ($\Rightarrow$) Falls $f = F'$, so ist $\int_\gamma f\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F(\gamma(t))'\,dt$.

($\Leftarrow$) Sei $F(w) := \int_0^w f\,dz$. Dann ist $\frac{F(w+h)-F(w)}{(w+h)-w} = \frac{1}{h}\int_w^{w+h} f\,dz$ (z.B. entlang der Strecke $\overline{w\,(w+h)}$). Mit $|f(z) - f(w)| \le M(h)$ für $z \in \overline{w\,(w+h)}$ ist

$$|\tfrac{1}{h}\int_w^{w+h} f\,dz - f(w)| = |\tfrac{1}{h}\int_w^{w+h} (f - f(w))\,dz| \le \tfrac{|h|\cdot M(h)}{|h|} = M(h) \xrightarrow{h\to 0} 0. \qquad \square$$

Beispiele: 1) Für $n \ne -1$ hat $f(z) = z^n$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ auf $\mathbb{C}$ (für $n \in \mathbb{N}$) und auf $\mathbb{C}^*$ (für $n \in \mathbb{Z}_{\le -2}$). Das impliziert das Verschwinden der Integrale im Beispiel (3.1).

2) $f(z) = 1/z$ auf $\mathbb{C}^*$ hat $F(z) = \log z$ als Stammfunktion nur auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$. Dort gilt dann $\log(z) = \int_1^z dw/w$.

3) $z \mapsto |z|$ ist nicht holomorph, z.B. wegen Aufgabe 4.2. Wir können aber auch die Integrale längs $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ (gibt 1) und längs des (oberen) Einheitshalbkreises ($\int |z|\,dz = \int dz = 2$) vergleichen.

3.4. **Der Cauchysche Integralsatz.** Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{C}$ mit Rand und eine in einer Umgebung von M definierten holomorphen Funktion f gilt

$$\int_{\partial M} f\,dz \overset{\text{Stokes}}{=} \int_M d(f\,dz) = \int_M (df \wedge dz) = \int_M (\tfrac{\partial f}{\partial z} dz + \tfrac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z) \wedge dz = 0.$$

Wir zeigen das jetzt nochmal direkt. 15.5.17 (7)

Lemma 10 (von Goursat)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $\triangle := \mathrm{conv}\{a,b,c\} \subset U$ ein Dreieck. Dann ist $\int_{\partial\triangle} f\,dz = 0$* (fixiere eine Orientierung).

Proof. Konstruiere eine Kette $\triangle = \triangle^0 \supset \triangle^1 \supset \ldots$ mittels Unterteilung von jedem $\triangle^n$ in vier kongruente Teildreiecke durch sukzessives Halbieren der Kanten und anschließender Auswahl eines $\triangle^{n+1} \subset \triangle^n$ mit $|\int_{\partial\triangle^{n+1}} f dz| \ge \frac{1}{4}|\int_{\partial\triangle^n} f dz|$.

Sei $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \triangle^n = \{z_0\}$ und $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)$ mit $\frac{r(z)}{z-z_0} \xrightarrow{z\to z_0} 0$. Dann ist $|\int_{\partial\triangle} f dz| \le 4^n |\int_{\partial\triangle^{n+1}} f dz| = 4^n |\int_{\partial\triangle^{n+1}} r\,dz|$ (die lineare Funktion hat eine Stammfunktion, also ist $\int_{\partial\triangle^{n+1}} = 0$). Dann schätzt man ab mit $L_n := L(\partial\triangle^{n+1}) = 2^{-n} L(\partial\triangle)$ und $|z - z_0| < L_n$ für $z \in \triangle^n$. $\square$

Theorem 11. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und G ein sternförmiges Gebiet. Für geschlossene Wege γ in G gilt dann $\int_\gamma f dz = 0$.*

Proof. Wir konstruieren eine Stammfunktion für f. Ist $*$ ein Sternmittelpunkt, so sei $F(w) := \int_{\overline{*w}} f dz$. Wir prüfen $F'(w) = f(w)$ wie in Satz 9 mittels $\triangle(*, w, w+h)$. $\square$

Bemerkung: Für Theorem 11 genügt es, wenn f in $G\setminus\{*\}$ holomorph und in $*$ stetig ist: Wir benötigen nur $\int_{\partial\triangle} f dz = 0$ für Dreiecke $\triangle(*, w, w')$. Dazu schneide man die Ecke $*$ immer enger ab.

3.5. **Elementargebiet.** Der vorige Satz gibt Anlaß zu einem neuen Begriff:

Definition 12. Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Elementargebiet*, falls dort jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion hat. (Theorem 11 $\rightsquigarrow$ *Beispiel:* sternförmige Gebiete).

4. Die Cauchyschen Integralformeln

17.5.17 (8) 4.1. **Die Cauchysche Integralformel.** $B_r := B_r(0)$ oder $B_r(z_0)$; sei $r < R$.

Lemma 13. *Sei $a \in B_r$. Dann gilt $\int_{\partial B_r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$.*

Proof. Ist a der Mittelpunkt: $\nearrow$(3.1). Sei sonst $\overline{B_s(a)} \subset B_r$. Man unterteilt $B_r\setminus\overline{B_s(a)}$ in sternförmige Gebiete, und es folgt $\int_{\partial B_r} \frac{dz}{z-a} - \int_{\partial B_s(a)} \frac{dz}{z-a} = \int_{\partial B_r\setminus\overline{B_s(a)}} \frac{dz}{z-a} = 0$. □

Theorem 14. *Sei $f : B_R \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)}$ für alle $a \in B_r$ $(r < R)$. Das impliziert den Mittelwertsatz $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\,e^{it})\, dt = f(a)$.*

Proof. $g(z) := \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ ist in $B_R \setminus \{a\}$ holomorph und mit $g(a) := f'(a)$ in a stetig. Zusatz zu Theorem 11 $\rightsquigarrow 0 = \int_{\partial B_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = \int_{\partial B_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - f(a)\int_{\partial B_r} \frac{dz}{z-a}$. □

4.2. **Die Taylorreihe holomorpher Funktionen.** Falls $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, so muß seine Taylorreihe $\sum_{n\ge 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ nicht konvergieren (Bsp. e^{-1/x^2}). Über $\mathbb{C}$ gilt [holomorph $\Rightarrow$ analytisch]:

Theorem 15. *Sei $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und $r < R$. Dann gilt für $z \in B_r(z_0)$ $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n(z - z_0)^n$ mit $c_n = \boxed{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw} \rightsquigarrow$ analytisch.*

Proof. Wir ersetzen $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot 1/(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}) = \sum_{n\ge 0} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ in $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ (gleichmäßige Konvergenz $\leftrightarrow \int$) und benutzen Satz 6. □

Die Taylorreihe konvergiert also sogar *global* auf jedem Kreis, auf dem f holomorph ist. (Gegenbeispiel: Konvergenzradius der auf $\mathbb{R}$ analytischen Funktion $x \mapsto 1/(1 + x^2)$ ist *nicht* ∞.) Zusätzlich erhalten wir die Abschätzung $|c_n| \le M/r^n$ falls $|f| \le M$ auf $\overline{B_r(z_0)}$.

4.3. **Der Satz von** Morera. Wir wissen jetzt, daß die Begriffe ,,holomorph" und ,,analytisch" äquivalent sind (insbesondere folgt, daß mit f auch f' holomorph ist). Wir zeigen jetzt die Umkehrung von Lemma 10:

Satz 16. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, so daß $\int_{\partial\triangle} f\,dw = 0$ für alle Dreiecke $\triangle \subset U$ gilt. Dann ist f in U holomorph.*

Proof. Sei $z_0 \in U$ und $B_r(z_0) \subseteq U$. Wir bekommen mit $F(z) := \int_{z_0}^{z} f dw$ eine Stammfunktion von f (wie im Beweis von Satz 9). Diese ist insbesondere holomorph, und das ist dann nach Theorem 15 auch $f = F'$. □

4.4. **Logarithmus holomorpher Funktionen.** Sei G ein Elementargebiet und $f : G \to \mathbb{C}^*$ holomorph – dann gibt es holomorphe Funktionen $\log f(z)$ und $\sqrt[n]{f(z)}$ auf G. (*Achtung:* Das gilt, obwohl log und $\sqrt[n]{\bullet}$ nicht global auf $\mathbb{C}^*$ definiert sind.) 22.5.17 (9)

Ansatz: $F :=$ Stammfunktion von $f'/f \Rightarrow G(z) := \exp(F(z))/f(z)$ hat $G' = 0$, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $G(z) = \exp(c) \rightsquigarrow \log f(z) := F(z) - c$.

Die n-ten Wurzeln aus f entstehen mittels $\sqrt[n]{f(z)} := \exp\left(\frac{1}{n}\log(f(z))\right)$.

Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$, für die alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}^*$ eine Quadratwurzel besitzen, nennen wir *speziell*. Elementargebiete sind also insbesondere speziell.

4.5. **Ganze Funktionen.** Holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißen *ganz* – Beispiele: $\mathbb{C}[z]$, exp, sin, cos. Hier konvergiert die Taylorreihe um jeden Punkt überall.

Satz 17 (Liouville)**.** *Beschränkte ganze Funktionen sind konstant.*

Proof. Sei $f(z) \le M$. Für $f(z) = \sum_n c_n z^n$ gilt dann $|c_n| \le M/r^n$ für alle r. □

Damit ergibt sich eine neue Variante für den zweiten Teil des Beweises von Theorem 3: Falls $|f(\mathbb{C})| \ge |f(0)| > 0$, dann wäre $1/f$ ganz und beschränkt.

4.6. **Identitätssatz holomorpher Funktionen.** Holomorphe Funktionen sind schon auf (durchaus ,,dünnen") Mengen mit Häufungspunkt bestimmt:

Satz 18. *$0 \ne f : G \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow Z(f) := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ hat keinen Häufungspunkt in G.* (Gegenbeispiel: $Z(\sin(1/z)) \subset \mathbb{C}^*$ hat 0 als HP.)

Proof. Seien $Z(f) \ni z_k \to a \in G$ und $f(z) = \sum_{n\ge 0} c_n(z-a)^n$. Dann ist $c_0 = f(a) = 0$, also (falls $c_\ell \ne 0$) $f(z) = (z-a)^\ell\, g(z)$ mit $g(a) \ne 0$ aber $g(z_k) = 0$.
Die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ ist also offen (abgeschlossen sowieso). □

Insbesondere: (i) analytische Fortsetzungen sind eindeutig (falls sie existieren); 24.5.17 (10)
(ii) für $G \cap \mathbb{R} \ne \emptyset$ sind holomorphe $f : G \to \mathbb{C}$ durch $f|_{G\cap\mathbb{R}}$ bestimmt;
(iii) $[\mathcal{O}(G) :=$ Ring der auf G holomorphen Funktionen$]$ ist nullteilerfrei.

4.7. Schwarz**sches Spiegelungsprinzip.** Sei $G = G_+ \cup G_0 \cup G_- \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G_0 \subseteq \mathbb{R}$, $G_+ \subseteq \operatorname{int} \mathbb{H}$ (offene obere Halbebene) und $G_- = \{\overline{z} \mid z \in G_+\}$. Dann iläßt sich jedes stetige $f : (G_+ \cup G_0) \to \mathbb{C}$ mit $f(G_0) \subseteq \mathbb{R}$, das holomorph in G_+ ist, holomorph auf G fortsetzen (mittels $f(z) := \overline{f(\overline{z})}$). Das folgt aus

Lemma 19. *Sei $g \subset \mathbb{C}$ eine Gerade und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{U\setminus g}$ holomorph. Dann ist f sogar auf U holomorph.*

Proof. Satz 16 (Morera) $\rightsquigarrow$ wir müssen prüfen $\int_{\partial\triangle} f dz = 0$. Falls g das Dreieck $\triangle$ berührt, so schätzt man $\int_{\partial\triangle} f dz$ mittels leicht verkleinerter Dreiecke $\triangle'$ ab. □

4.8. **Das Maximum-Prinzip.** Holomorphe Funktionen haben Maxima auf ∂G:

Satz 20. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| \geq |f(G)|$. Dann ist f auf G konstant.* (Es genügt ein lokales Maximum.)

Proof. Theorem 14 $\rightsquigarrow$ $|f(0)| = |\int_0^1 f(e^{2\pi irt})dt| \leq \int_0^1 |f(e^{2\pi irt})|dt \leq \int_0^1 |f(0)|dt = |f(0)|$ für beliebige $r > 0 \Rightarrow |f(z)|$ ist konstant auf Umgebung von $z_0 = 0$.
Dann kann Aufgabe 4.2 auf $\log(f)$ angewandt werden – oder: Falls $|a| = |b| = 1$, so ist $|a + b| \leq |a| + |b| = 2$, und "=" impliziert $a = b$ nach Kosinussatz. □

Dieselbe Aussage gilt dann auch für $0 < |f(z_0)| \leq |f(G)|$ (man betrachte $1/f$). Das führt wieder auf den Beweis von $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

4.9. **Gebietstreue.** Nicht konstante holomorphe Abbildungen sind offen:

Satz 21. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

29.5.17 (11, David) *Proof.* Sei $f(0) = 0$; es gibt ein r mit $|f(\partial B_r)| \geq 2\varepsilon > 0$. Sei $w \in B_\varepsilon(0) \Rightarrow |f(\partial B_r) - w| > \varepsilon$; für $0 = f(0)$ gilt allerdings $|f(0)-w| < \varepsilon$, d.h. $|f(\bullet)-w|$ nimmt sein Minimum im Innern von B_r an. Minimum-Prinzip in (4.8) $\rightsquigarrow$ dieses Minimum ist Null, d.h. $\exists z_0 \in B_r : |f(z_0) - w| = 0$, also $f(z_0) = w$. □

5. Singularitäten und Laurentreihen

5.1. **Holomorphe Funktionen ähneln z^n.** Sei f in z_0 holomorph mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ und $f^{(0\leq k<n)}(z_0) = 0$. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $\Phi : B_r(0) \xrightarrow{\sim} U(z_0)$ $(0 \mapsto z_0 \in U(z_0) = \text{offen})$, so daß $\Phi^*(f) = (f \circ \Phi)$ die Funktion $z \mapsto z^n$ ist:

$f(z) = (z - z_0)^n\, g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$. Mittels (4.4) ist $G(z) := (z - z_0)\sqrt[n]{g(z)}$ in einer Umgebung von z_0 holomorph mit $G(z_0) = 0$ und $G'(z_0) = \sqrt[n]{g(z_0)} \neq 0$. Satz über implizite Funktionen $\rightsquigarrow$ $G : U(z_0) \xrightarrow{\sim} B_r(0)$ ist ein lokaler $\mathbb{R}^2$-Diffeomorphismus $\rightsquigarrow$ G ist biholomorph (Satz 4) und wegen $f = G^n$ setzen wir $\Phi := G^{-1}$.

Insbesondere hat dann für kleine b die Gleichung $f(z) = b$ immer genau n Lösungen. D.h. $f : U(z_0) \to \mathbb{C}$ ist eine „in z_0 verzweigte, n-fache Überlagerung“.

5.2. **Unwesentliche Singularitäten holomorpher Funktionen.** Sei $f : U^* \to \mathbb{C}$ holomorph mit $U^* := U \setminus \{0\}$ und $\overline{B_R(0)} \subset U$ („$0 \in U$ ist Singularität von f“, *Beispiel:* $f = \sin z/z$) $\rightsquigarrow$ drei verschiedene Typen: $\boxed{\text{hebbar, Pol, wesentlich}}$.

Satz 22 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) f *hat eine holomorphe Fortsetzung auf* 0 („hebbare Singularität“),
(ii) f *ist stetig auf* 0 *fortsetzbar* (d.h. $\lim_{z\to 0} f(z) \in \mathbb{C}$ existiert),
(iii) f *ist beschränkt auf* $B_R(0)^*$,
(iv) $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$. ((iv) $\Rightarrow zf(z)$ ist holomorph $\Rightarrow zf(z) = \sum_{n\geq 1} c_n z^n \Rightarrow$ (i).)

Definition 23. 0 heißt *Pol* von $f :\Leftrightarrow \lim_{z\to 0} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} 1/f(z) = 0$.

Hebbar: $f(z) = z^k g(z)$ ($g =$ holomorph in 0, $g(0) \neq 0$), $k \geq 0$ „Nullstellen-Ordnung“
Pol: $1/f(z) = z^k h(z)$, also $f(z) = z^{-k} g(z)$. $k \geq 1$ „Pol-Ordnung“.
Insgesamt gibt es ein eindeutiges $\mathrm{ord}(f,0) \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = z^{\mathrm{ord}(f,0)} \cdot g(z)$ ($g(0) \neq 0$).

Die Funktionen f (genauer: ihre Keime in 0) mit nicht-wesentlicher Singularität in 0 (“meromorph” in 0) bilden einen Körper $\cong \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$, und ord ist eine Bewertung, d.h. $\mathrm{ord}(fg) = \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g)$ und $\mathrm{ord}(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g)\}$. 31.5.17 (12)

5.3. **Die projektive Gerade.** $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit Koordinaten $(z_0 : z_1)$ und $\infty := (0:1)$; Einbettung von $z \in \mathbb{C}$ mittels $(1:z)$ (Standardkarte U_0 um 0); Karte U_1 um ∞ mittels $w = (w:1)$ und Übergang $w = 1/z$.

Riemannsche Zahlenkugel: (1.1) $\rightsquigarrow S^2 \ni (x,y,h) \mapsto z := \frac{x+iy}{1-h}$, also $1/z = \frac{1-h}{x+iy} = \frac{x-iy}{1+h}$, d.h. die stereographische Projektion setzt sich stetig fort zu $S^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als *Wertebereich*: Eine holomorphe Funktion $f : U^* \to \mathbb{C}$ ist meromorph auf U (in 0) $\Leftrightarrow$ sie läßt sich zu einer holomorphen Abbildung $f : U \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ fortsetzen. Allgemein haben nicht-konstante, meromorphe f (in U) diskrete Mengen von 7.6.17 (13) Nullstellen $Z(f) := f^{-1}(0)$ und Polstellen $P(f) := f^{-1}(\infty)$; die meromorphen Funktionen bilden einen Körper $\mathcal{M}(U) \supset \mathcal{O}(U)$; Punkte $z \in U \rightsquigarrow$ Bewertungen ord_z.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als *Definitionsbereich*: $\partial B_1 \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ kann man als Kreis um 0 oder um ∞ (aber dann mit entgegengesetzter Orientierung) auffasssen: $2\pi i = \int_{\partial B_1} \frac{dz}{z} = \int_{\partial B_1} w\, d(\frac{1}{w}) = -\int_{-\partial B_1} \frac{dw}{w} = -(-2\pi i)$.

Kombiniert kann oben statt $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ (und $U^* = U \setminus \{0\}$) auch $a \in U \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (und $U^* = U \setminus \{a\}$) betrachtet werden; wir betrachten also $f : U \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

5.4. **Wesentliche Singularitäten.** Für diese existiert $\lim_{z\to 0} f(z)$ nicht.

Satz 24 (Casorati-Weierstrass)**.** *Sei* 0 *eine wesentliche Singularität von* f*. Dann ist* $f\big(B_R(0)^*\big) \subseteq \mathbb{C}$ *(für beliebig kleine* $R > 0$*) eine dichte Teilmenge.*

Proof. Falls $b \notin \overline{f\big(B_R(0)^*\big)}$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f\big(B_R(0)^*\big) - b| > \varepsilon$. Dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z)-b}$ in $B_R(0)^*$ beschränkt, also in 0 holomorph. $f(z) = b + 1/g(z)$. $\square$

Beispiel: $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{n\leq 0} z^n/|n|!$.

5.5. Laurent**reihen.** Eine Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ heißt (absolut/gleichmäßig) konvergent :⇔ $\forall/\exists\, g \in \mathbb{Z}$: $\sum_{k<g} a_k$ und $\sum_{k\geq g} a_k$ konvergieren entsprechend.

$\sum_{n\geq 0} c_n z^n \rightsquigarrow$ (1.3): Konvergenz in $|z| < R := (\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$;
$\sum_{n<0} c_n z^n = \sum_{k>0} c_{-k}(\frac{1}{z})^k \rightsquigarrow$ Konvergenz in $|z| > r := \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$.
Falls $r < R$ ($r = 0$, $R = \infty$ sind erlaubt) $\rightsquigarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}(r, R) := \{z \mid |z| \in (r, R)\}$ ist der Kreisring, in dem $f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ absolut konvergiert und holomorph ist. Dabei gilt

$$r < r' < R' < R \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial B_{r'}} f(z)\, dz = \int_{\partial B_{R'}} f(z)\, dz$$

(man zerlege den inneren Kreisring in sternförmige Gebiete). Umgekehrt haben wir

Theorem 25. *Seien* $0 \leq r < R \leq \infty$ *und* $f : \mathcal{R}(r, R) \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann konvergiert* $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ *mit* $c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$ *für* $z \in \mathcal{R}(r, R)$ *absolut. Dabei ist* $B = B_s(0)$ *ein Kreis mit beliebigem Radius* $s \in (r, R)$*.*

Proof. Wir kopieren die Beweise der Theoreme 14 und 15. Seien $z \in \mathcal{R}(r, R)$ und $r < r' < |z| < R' < R$. Wir definieren $g_z(w) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ für $w \neq z$ und $g_z(z) := f'(z)$. Diese Funktion ist holomorph, und es folgt

$$\int_{\partial B_{R'}-\partial B_{r'}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \cdot \int_{\partial B_{R'}-\partial B_{r'}} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial B_{R'}-\partial B_{r'}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = 0.$$

Wegen Lemma 13 gilt $\int_{\partial B_{R'}} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$, und aus $z \notin \overline{B_{r'}}$ folgt $\int_{\partial B_{r'}} \frac{dw}{w-z} = 0$. Wir ersetzen dann wieder $\frac{1}{w-z} = \sum_{n\geq 0} z^n/w^{n+1}$ (für $|z| < |w|$) im $\partial B_{R'}$-Teil des ersten Integrals, aber nun auch $\frac{1}{w-z} = -\sum_{n\geq 0} w^n/z^{n+1}$ (für $|z| > |w|$) im $\partial B_{r'}$-Teil desselben Integrals – und vertauschen gleichmäßige Konvergenz und $\int_{\partial B}$. □

12.6.17 (14)

Bemerkung. Falls 0 eine isolierte Singularität von f ist, so läßt sich Theorem 25 mit $r = 0$ anwenden. Der negative Teil $\sum_{n<0} c_n z^n$ heißt *Hauptteil* von f in 0. Die wesentlichen Singularitäten sind dann genau durch *nicht* abbrechende Hauptteile charakterisiert.

6. Biholomorphe Abbildungen und Automorphismen

6.1. $\mathbb{B}, \mathbb{H}, \mathbb{C}$ **und** $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$**.** Der Einheitskreis $\mathbb{B} := B_1(0)$, die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\mathbb{C}$ sind Elementargebiete (da sternförmig). Wir untersuchen jetzt biholomorphe Abbildungen (also "holomorphe Isomorphismen" wie Φ in (5.1)) zwischen diesen und anderen Gebieten. Es gibt folgende Beispiele:

6.1.1. $(az + b) : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ für $a \neq 0$ (Automorphismen).

6.1.2. $\exp : \mathbb{C} \supset \operatorname{Im}^{-1}(a, b) \xrightarrow{\sim} \arg^{-1}(a, b) \subset \mathbb{C}^*$ für $b - a \leq 2\pi$ (Streifen $\xrightarrow{\sim}$ Kreissektor); speziell $\exp : \mathbb{R} \times (0, \pi)i = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \in (0, \pi)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$.

6.1.3. $a \in \mathbb{B} \rightsquigarrow \boxed{f_a : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}}$, $z \mapsto \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ mit $f_a^{-1} = f_a$ (vertauscht $0, a$); $\boxed{S^1 \subseteq \operatorname{Aut}(\mathbb{B})}$.
Es gilt $e^{i\theta} \cdot f_a = f_{e^{i\theta}a} \cdot e^{i\theta}$.

6.1.4. $b \in \mathbb{H} \rightsquigarrow \boxed{g_b : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}}$, $z \mapsto \frac{z-b}{z-\overline{b}}$ mit $b \mapsto 0$; speziell ist $g_i(z) = \frac{z-i}{z+i}$ und $g_i^{-1}(w) = i\,\frac{1+w}{1-w}$.

6.1.5. $\Psi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (Gruppen-Injektion) mittels $\mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, d.h. $(z:w) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ wird gemäß $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ auf $((az+bw):(cz+dw))$ abgebildet. Die Fälle (3), (4) ordnen sich ein – Kompositionen werden Matrizenmultiplikationen. 14.6.17 (15)

6.2. **Automorphismen von $\mathbb{B}$.** (6.1.3) liefert schon die gesamte Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$:

Lemma 26 (Schwarz)**.** *Sei $f : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$. Und: An einer Stelle "$=$" $\rightsquigarrow f = (e^{\imath\theta}\cdot)$.*

Proof. $g(z) := f(z)/z$ holomorph; $g(0) = f'(0)$ und $|g(z)| \leq 1/|z|$, d.h. $\leq 1/r$ auf ∂B_r und damit auch auf $\overline{B}_r$ (MaxPrinzip). Mit $r \to 1$ folgt $|g| \leq 1$ auf $\mathbb{B}$.
Sei $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow$ nach MaxPrinzip ist g konstant (mit $|g| = 1$). □

Satz 27. *$\{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}) \mid \varphi(0) = 0\} = \{e^{i\theta}\} = S^1$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}) = \{f_a \mid a \in \mathbb{B}\} \cdot S^1$.*

Proof. $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{B})$: Lemma 26 für φ, φ^{-1}. Für $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ folgt $f_{h(0)} \circ h \in S^1$. □

Analog ist für jede biholomorphe Abbildung $h : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ mit $h^{-1}(0) = b$ das Produkt $h\,g_b^{-1} \in \mathrm{Aut}_0(\mathbb{B}) = S^1$, also ist $h = e^{i\theta} \cdot g_b$.

6.3. **Automorphismen von $\mathbb{H}$.** Wegen $g : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ kennen wir im Prinzip auch $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = g^{-1} \circ \mathrm{Aut}(\mathbb{B}) \circ g$. Aber mittels der Konstruktion (6.1.5) erhalten wir ganz direkt einen Isomorphismus $\boxed{\Psi : \mathrm{GL}_+(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{H})}$:

Für die Surjektivität prüft man, daß $g^{-1} f_a\, g = \begin{pmatrix} (\overline{a}-a)i & (a+\overline{a}+2) \\ (a+\overline{a}-2) & -(\overline{a}-a)i \end{pmatrix}$ reell mit $\det > 0$ ist. Analog gilt $g^{-1} e^{i\theta}\, g = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\, i = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

6.4. **Automorphismen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.** Holomorphe Abbildungen $(f \neq \infty) : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sind dasselbe, wie meromorphe Funktionen auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (wir schreiben $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{C}$, da f als Funktion nicht überall definiert ist); sie bilden den Körper $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.

Satz 28. *$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z) := \mathrm{Quot}\,\mathbb{C}[z] := \{a(z)/b(z) \mid a, b \in \mathbb{C}[z], b \neq 0\}$.*

Proof. Seien $P(f) = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die Pole von f (diskret im kompakten $\mathbb{P}^1$, also endlich). Seien $f(z) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu^{(j)} (z-a_j)^\nu$ die Laurentreihen von f in a_j; wir zerlegen diese in $p^{(j)}(z) + f^{(j)}(z)$ (je nach $\nu \leq -1$ und $\nu \geq 0$). Die „Hauptteile" $p^{(j)}(z)$ sind dann auf dem gesamten $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_j\}$ holomorph (siehe auch (7.3); der Hauptteil in ∞ liegt in $\mathbb{C}[z]$, siehe Aufgabe 8.1) $\rightsquigarrow g := f - \sum_{j=1}^k p^{(j)}$ ist holomorph auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, also konstant. □

Folgerung 29. $\Psi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (aus (6.1.5)) *ist ein Isomorphismus.*

Proof. Sei $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{C}$ ein Automorphismus; dann ist $f(z) = a(z)/b(z)$ (mit $a, b \in \mathbb{C}[z]$) und bijektiv. Also sind a, b linear. □

Nicht-triviale Automorphismen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ haben höchstens zwei Fixpunkte (führt auf $cz^2 + (d-a)z - b = 0$); für alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{P}^1$ gibt es (genau) ein $f_c \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^1$ mit $f_c : c_1, c_2, c_3 \mapsto 0, 1, \infty$ (nämlich $f_c(z) = \frac{(z-c_1)(c_3-c_2)}{(z-c_2)(c_3-c_1)}$).

19.6.17 (16)

Für vier Punkte $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{P}^1$ ist das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(c_0, c_1, c_2, c_3) := \frac{(c_0-c_1)(c_3-c_2)}{(c_0-c_2)(c_3-c_1)} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ invariant unter Automorphismen, d.h. für $g \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^1$ ist $\mathrm{DV}(g(\underline{c})) = \mathrm{DV}(\underline{c}) = f_{(c_1,c_2,c_3)}(c_0)$.

6.5. **Automorphismen von $\mathbb{C}$.** Für $f : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ folgt $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$ (denn $f^{-1}\overline{B}_R(0)$ ist kompakt, also $\subseteq B_r(0)$). Also liefert $\infty \mapsto \infty$ eine Erweiterung zu $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Aus $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ folgt dann aber $c = 0$ (sonst $f(-d/c) = \infty$). Es folgt die Exaktheit von $0 \to \mathbb{C} \to \operatorname{Aut}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* \to 1$, d.h. $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) =$(6.1.1).

7. Windungszahlen und Residuen

7.1. **Homotopien.** Zwei (stückweise glatte) Wege $\alpha, \beta : [0, 1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ von z nach w heißen in U homotop ($\alpha \sim \beta$) :⇔ es gibt eine stückweise glatte Homotopie $H : [0, 1]^2 \to U$, d.h. $H(\bullet, 0) = \alpha$, $H(\bullet, 1) = \beta$ und $H(0, \bullet) = z$, $H(1, \bullet) = w$. Geschlossene Wege heißen 0-homotop :⇔ sie sind homotop zum konstanten Weg.

$\rightsquigarrow$,,Fundamentalgruppe" $\pi_1(U, z_0) := \{$geschlossene Wege $\gamma : z_0 \rightsquigarrow z_0\}/\sim$; die Homotopie ist wichtig für die Gruppengesetze. Ist $\gamma : z_0 \rightsquigarrow z_1$, dann gilt $\pi_1(U, z_0) = \gamma * \pi_1(U, z_1) * \gamma^{-1} \cong \pi_1(U, z_1)$.
Beispiel: sternförmige $U \subseteq \mathbb{C}$ sind ,,einfach zusammenhängend", d.h. $\pi_1(U) = 0$. (Unterschied ,,stetig" ↔ ,,stückweise glatt": Siehe Aufgabe 10.4)

Lemma 30. *Sei K ein kompakter metrischer Raum und $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß beliebige $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ stets in einem gemeinsamen U_α liegen.*

Proof. Für jedes $x \in K$ fixiere man ein $V_x = B_{r(x)}(x)$ mit $B_{2r(x)}(x) \subseteq U_{\alpha(x)}$; dann wähle man eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{x_i}\}$ aus und setze $\delta := \min\{r(x_i)\}$. □

21.6.17 (17)

Satz 31. *Seien $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\alpha \sim \beta$ in U. Dann gilt $\int_\alpha f dz = \int_\beta f dz$.*

Proof. Sei $H : [0, 1]^2 \to U$ eine Homotopie – wir müssen zeigen, daß $\int_{\partial H} f dz = 0$. Dazu zerlegt man $[0, 1]^2$ mittels Lemma 30 in $n \times n$ Teilquadrate $Q_{ij} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, so daß $H(Q_{ij})$ in sternförmigen Mengen, z.B. Kreisscheiben liegen. □

Insbesondere sind einfach zusammenhängende Gebiete (3.5) immer elementar.

7.2. $\boxed{\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}}$. Jeder stetige Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ läßt sich bei vorgegebenen $\widetilde{\gamma}(0) \in \exp^{-1}(\gamma(0))$ eindeutig zu einem stetigen Weg $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ liften: $\mathbb{C}^* = U^+ \cup U^-$ $(= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq/\geq 0})$ führt zu $\exp^{-1}(U^\pm) = \sqcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k^\pm$ (mit $U_k^- := U_k^+ - \pi i$ und $U_k^+ := [\mathrm{Im} \in (2k-1, 2k+1)\pi]$), so daß alle $\exp : U_k^+ \to U^+$ ISOs sind.
Dann unterteilen wir $[0,1]$ in $\cup_k [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, so daß jedes $\gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$ vollständig in U^+ oder U^- liegt (Lemma 30); der Weg γ läßt sich so schrittweise liften.

Satz 32. *Jeder geschlossene* (stückweise glatte) *Weg* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ *mit* $\gamma : 0 \mapsto 1$ *ist homotop zu genau einem der Wege* $c_k(t) := \exp(2\pi i k t)$ $(k \in \mathbb{Z})$. *Und dann ist* $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = k$.

Proof. Wegen $\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} \frac{dz}{z} = k$ ist k eindeutig bestimmt. Für die Existenz sei $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Liftung. Dann folgt $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0) = 2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und $\widetilde{\gamma}$ ist in $\mathbb{C}$ homotop zu $\widetilde{c_k}(t) := 2\pi i k t$. Diese Homotopie wird mit exp auf $\mathbb{C}^*$ gedrückt. □

Folgerung 33. 1) $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$
2) *Sei* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *ein geschlossener* (stückweise glatter) *Weg und* $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. *Dann ist* $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$ (=: $\mathrm{ind}_\gamma(a) = \mathrm{ind}(\gamma, a) =$ „Windungszahl" von γ um a).

Für fixiertes γ ist $\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1]) \to \mathbb{Z}$ stetig und damit konstant auf den Zusammenhangskomponenten. Wir definieren das $\boxed{\text{Äußere/Innere von } \gamma}$ als die Bereiche der $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ mit $\mathrm{ind}_\gamma(a) = 0$, bzw. $\mathrm{ind}_\gamma(a) \neq 0$. 26.6.17 (18)

7.3. **Residuensatz.** Sei $a \in U$ eine Singularität eines holomorphen $f : U \setminus a \to \mathbb{C}$, siehe (5.2). Wenn $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-a)^k$ in $B_r^*(a)$, siehe (5.5), dann heißt

$$\mathrm{res}(f, a) := c_{-1} = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das $\boxed{\text{Residuum von } f}$ in a (die $\int_{\partial B_r(a)} (z-a)^n dz$ verschwinden für $n \neq -1$, da $(z-a)^n$ dann eine Stammfunktion hat).

Theorem 34. *Sei* $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Elementargebiet und* $a_1, \ldots, a_k \in G$. *Für holomorphe* $f : G \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \to \mathbb{C}$ *und stückweise glatte Wege* $\gamma : [0,1] \to G \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ *gilt dann* $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^k \mathrm{res}(f, a_j) \cdot \mathrm{ind}(\gamma, a_j)$.

Proof. Seien $p^{(j)}(z)$ die Hauptteile von f in $a_j \in G$; diese sind auf dem gesamten $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$ holomorph (siehe auch (6.4) – dort waren die Hauptteile aber endliche Summen): Mit $w := \frac{1}{z-a_j}$ sind das Potenzreihen, die für $|w| > 1/R$ konvergieren; dann konvergieren sie aber überall $\rightsquigarrow g := f - \sum_{j=1}^k p^{(j)}$ ist holomorph auf G, also $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$.
Damit folgt $\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^k \sum_{\nu \leq -1} c_\nu^{(j)} \int_\gamma (z-a_j)^\nu\, dz$, und wegen der Existenz der Stammfunktionen von $(z-a_j)^\nu$ verschwinden die Integrale wieder für $\nu \neq -1$. □

7.4. **Zählen von Null- und Polstellen.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : G \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ meromorph. Bezeichnen $\#Z(f)$ und $\#P(f)$ die Anzahl der Null- und Polstellen von f in G (mit Vielfachheiten).

Satz 35. *Für stückweise glatte Wege $\gamma : [0,1] \to G$, die nicht durch $Z(f)$ und $P(f)$ verlaufen gilt* $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a\in Z(f)\cup P(f)} \operatorname{ord}(f,a)\cdot \operatorname{ind}(\gamma,a)$.

Proof. (5.1) $\rightsquigarrow$ lokal in $a \in G$ verhalten sich meromorphe f wie $c \cdot z^k$ in 0 ($k \in \mathbb{Z}$). Also $(f'/f,\, a) \sim (k\, z^{k-1}/z^k,\, 0) = (k \cdot 1/z,\, 0)$, d.h. $\operatorname{res}(f'/f, a) = k = \operatorname{ord}(f,a)$. $\square$

Folgerung 36. $\operatorname{ind}\big(\gamma, Z(f)\cup P(f)\big) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#Z(f) - \#P(f)$.

Folgerung 37 (Satz von Rouché)**.** $\operatorname{ind}_\gamma = 0,1 \rightsquigarrow$ *für holomorphe $f, g : G \to \mathbb{C}$ mit $|f| > |g|$ auf γ haben f und $f+g$ dieselbe Anzahl von Nullstellen im Inneren von γ.*

Proof. Sei $h_t(z) := f(z) + t\,g(z)$; das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}dz$ ist dann stetig in t. $\square$

Beispiele: 1) Fundamentalsatz der Algebra: $f \in \mathbb{C}[z]_d \Rightarrow$ die Anzahl der Nullstellen ist $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} f'/f dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(\infty)} \frac{f'(1/w)}{f(1/w)\cdot w^2}dw = d$.
2) $|\alpha| > e \rightsquigarrow$ es gibt genau eine Lösung von $z\exp(z) = 1/\alpha$ im Einheitskreis: $f(z) = \alpha z,\ g(z) = -\exp(-z)$.

Argumentprinzip: Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ ist auch der Index $\operatorname{ind}(f\circ\gamma,\, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\gamma}\frac{dw}{w}$ von $f\gamma$: Man vergleicht beide direkt über $\int_0^1 f'(\gamma(t))/f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 1/(f\gamma)(t)\cdot(f\gamma)'(t)dt$.

7.5. **Berechnung reeller Integrale.** 1) $A, B \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg A \le \deg B - 2$.
28.6.17 (19) Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} A/B\,dx$ (Integrand $\sim 1/x^{\ge 2}$). Falls B keine reellen Nullstellen hat, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} A/B\,dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}\cap P(A/B)} \operatorname{res}(A/B, a),$$

wobei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene ist.

Beweis: Sei $R \gg 0 \rightsquigarrow$ Integrationswege $\alpha_R :=$ relles Intervall $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ und $\beta_R :=$ oberer Halbkreis $(-R \rightsquigarrow R)$.

Dann ist $\int_{\alpha_R} A(z)/B(z)\,dz \to$ LHS und $\int_{\alpha_R - \beta_R} =$ RHS, und $|A(z)/B(z)| \le c/|z|^2$ gibt die Abschätzung von $\int_{\beta_R}$ mit der Weglänge (linear in R) $\rightsquigarrow |\int_{\beta_R}| \xrightarrow{R\to\infty} 0$. $\square$

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i\cdot\operatorname{res}(\frac{1}{z^2+1}, i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$.

2) $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ und $Q|_{S^1} \neq 0$. Wir berechnen das reelle Integral $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$:
Sei $f(z) := R(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}) \cdot \frac{1}{iz}$. Mit $z = \gamma(t) := \exp(it)$ ist $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$ und $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$, also $f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = R(\cos t, \sin t)$. Damit ist $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \int_{\partial B_1(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \operatorname{res}(f, \alpha)$.

Beispiel: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\,\cos t+a^2}$ – also $f(z)=\frac{1}{1+a^2-2a\frac{z+1/z}{2}}\cdot\frac{1}{iz}=\frac{i}{az^2-(a^2+1)z+a}=\frac{i}{(z-a)(az-1)}$. Für $a\in\mathbb{B}$ ist $\operatorname{res}(f,a)=\frac{i}{a^2-1}$, also $\int_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{1-a^2}$.

7.6. **Partialbruchzerlegung des Cotangens.** Laurentzerlegung $\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z+\ldots$ $\left(\frac{z\cdot\cos z}{\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2}+\ldots}{1-\frac{z^2}{6}+\ldots}=(1-\frac{z^2}{2}+\ldots)(1+\frac{z^2}{6}+\ldots)\right)$.

Satz 38. *Für $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ konvergiert $\pi\cdot\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\frac{z}{n(z-n)}$ absolut. Und das ist gleich $\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n})=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n})$.*

Proof. Absolute Konvergenz folgt wegen $\frac{1}{n(z-n)}\sim 1/n^2$. Dann betrachte man das meromorphe $f_z(w):=\frac{z}{w(z-w)}\cdot\pi\cdot\cot(\pi w)$. Einfache Pole: $w=z$ ($\operatorname{res}=-\pi\cot(\pi z)$) und $w=n\neq 0$ ($\operatorname{res}=\frac{z}{n(z-n)}$).
In $w=0$ gibt es einen doppelten Pol: $f_z(w)=\frac{z}{w(z-w)}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{\pi w}-\frac{1}{3}\pi w+\ldots)$ und $\frac{z}{z-w}=\frac{1}{1-w/z}=1+\frac{w}{z}+\frac{w^2}{z^2}+\ldots$ impliziert $f_z(w)=\frac{1}{w^2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{w}+\ldots$, also $\operatorname{res}=\frac{1}{z}$.
Wir integrieren entlang $\square_N:=$ Quadrat mit den Seiten $\operatorname{Re}=\pm(N+\frac{1}{2})$ und $\operatorname{Im}=\pm(N+\frac{1}{2})$; Residuensatz $\rightsquigarrow$ es bleibt zu zeigen: $\int_{\square_N}f_w\,dw\to 0$ für $N\to\infty$. Übliche Wegabschätzung (Länge ist linear in N und Integrand $\sim 1/N^2$) $\rightsquigarrow$ z.z.: $\cot(\pi w)$ ist beschränkt auf diesen (!) Wegen: 3.7.17 (20)
$|\cot(\pi w)|=\frac{|\exp(\pi iw)+\exp(-\pi iw)|}{|\exp(\pi iw)-\exp(-\pi iw)|}=\frac{|1+\exp(2\pi iw)|}{|1-\exp(2\pi iw)|}$. Für $|\operatorname{Im}w|>1$ ist das beschränkt; für kleine $|\operatorname{Im}w|\leq 1$ ist das zwar falsch – aber in $\square_N$ sind das dann vertikale Wege der Länge 2, die für $N\to\infty$ nur um $\mathbb{Z}$ verschoben sind $\rightsquigarrow$ benutze die Periodizität des cot. $\square$

Speziell folgt daraus $\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n(z-n)}=\frac{\pi}{z}\cot(\pi z)-\frac{1}{z^2}=\frac{\pi}{z}(\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{3}\pi z+\ldots)-\frac{1}{z^2}=\frac{1}{3}\pi^2+\ldots$. Für $z\to 0$ ergibt sich dann $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

8. Der Riemannsche Abbildungssatz

8.1. **Eigenschaften von Grenzwerten.** Seien $f_n:U\to\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit lokal gleichmäßiger Konvergenz $f_n\to f$.

Satz 39 (Hurwitz)**.** 1) *Falls $Z(f_n)=\emptyset$ für alle n, so ist $f=0$ oder $Z(f)=\emptyset$.*
2) *Falls alle f_n injektiv sind, so ist f konstant oder auch injektiv.*

Proof. (1) $f(a)=0\Rightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a)}f'/f\,dz\geq 1$, aber $\forall n:\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a)}f_n'/f_n\,dz=0$. Auf $\partial B(a)$ ist aber $f\neq 0$, also $|f|\geq\delta$. Damit ist $|f_n|\geq\delta/2$, und $f_n'/f_n\to f'/f$ konvergiert gleichmäßig auf $\partial B(a)$.
(2) $f(a)=f(b)\rightsquigarrow$ benutze (1) für $g_n:=f_n-f_n(b)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}f-f(b)=:g$ auf $U\setminus\{b\}$. $\square$

8.2. **Der Satz von Montel.** (Bolzano-Weierstraß-Variante für Funktionenfolgen)

Lemma 40. *$U \subseteq \mathbb{C}$ offen $\rightsquigarrow$ lokal $(\forall z_0 \in U\ \exists U(z_0))$ sind alle holomorphen und durch ein gemeinsames $c > 0$ beschränkten Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ gleichgradig gleichmäßig stetig. Das gilt dann auch auf kompakten $K \subseteq U$.*

Proof. Sei $\overline{B}_{2r}(z_0) \subseteq U$; dann wird für $a, b \in B_r(z_0)$ die Differenz $|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B_{2r}} f(z) \cdot \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) dz \right| = \frac{|b-a|}{2\pi} \cdot \left| \int_{\partial B_{2r}} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leq \frac{2c\,|b-a|}{r}$. □

Lemma 41. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $S \subseteq U$ dicht. Für holomorphe $f_n : U \to \mathbb{C}$ mit $|f_n| \leq c$ impliziert dann jede auf S punktweise Konvergenz der f_n eine lokal gleichmäßige Konvergenz.*

Proof. Wir zeigen, daß die f_n eine lokal gleichmäßige Cauchyfolge bilden. Für jedes $\delta > 0$ und $z_0 \in B_r \subset \overline{B}_{2r} \subset U$ gibt es ein endliches δ-Netz aus $S \cap \overline{B}_{2r}$ für B_r. Dann schätzt man mittels Lemma 40 ab: $f_m(z) \leftrightarrow f_m(s) \leftrightarrow f_n(s) \leftrightarrow f_n(z)$. □

Satz 42. *Seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ durch ein gemeinsames $c > 0$ beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge, die auf U lokal gleichmäßig konvergiert.*

Proof. Sei $S \subset U$ abzählbar und dicht. Mit $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ wählen wir sukzessive Teilfolgen $f_\bullet^{(k)}$, so daß $f_\bullet^{(k)}(s_{\leq k})$ konvergieren. Die Diagonalfolge konvergiert dann punktweise auf S, und wir benutzen Lemma 41. □

8.3. **Elementargebiete in $\mathbb{B}$.** $\mathbb{C}$ und $\mathbb{B}$ sind homöomorph: Analog zu $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} (0,1)$ oder $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1)$ benutze man $f : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$, $z \mapsto z/(1+|z|)$ (mit Inversem $w \mapsto w/(1-|w|)$). Aber $\mathbb{C}$ kann nicht biholomorph zu einem $U \subseteq \mathbb{B}$ sein (Liouville).

5.7.17 (21, Anna-Lena) **Lemma 43.** *Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein spezielles Gebiet* (d.h. $\exists \sqrt{G \to \mathbb{C}^*}$, (4.4)). *Dann ist G biholomorph zu einem* (dann auch speziellen) *Gebiet $0 \in G' \subseteq \mathbb{B}$.*

Proof. Sei $0 \notin G$. Dann gibt es ein holomorphes $f := \sqrt{z} : G \xrightarrow{\sim} f(G) \subseteq \mathbb{C}^*$ (Aufgabe 8.2). Damit ist $f^{-1}(w) = w^2$ injektiv auf $f(G)$, d.h. $\pm w$ können nicht beide in $f(G)$ liegen. Mit $B(-w_0) \subseteq f(G)$ folgt $B(w_0) \cap f(G) = \emptyset$. Benutze $z \mapsto 1/(z - w_0)$. □

8.4. **Isomorphismus nach $\mathbb{B}$.** Wir benutzen Lemma 26 von Schwarz, Satz 39 von Hurwitz und Satz 42 von Montel, für den Riemannschen Abbildungssatz:

Theorem 44. *Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein spezielles Gebiet. Dann ist G biholomorph zu $\mathbb{B}$.*

Proof. Lemma 43 $\rightsquigarrow 0 \in G \subseteq \mathbb{B}$. Das führt zu der nicht-leeren Menge

$$\mathcal{F} := \{f : G \to \mathbb{B} \mid \text{injektiv, holomorph, } f(0) = 0\} \ni \mathrm{id}_G\,.$$

Sei $M := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$ und $f_n \in \mathcal{F}$ mit $|f_n'(0)| \to M$. Die f_n sind uniform beschränkt (durch $c = 1$) $\rightsquigarrow$ o.B.d.A. $f_n \to f$ (Montel). Cauchysche Integralformel $\rightsquigarrow f_n' \to f'$, also $|f'(0)| = M \neq 0 \rightsquigarrow f$ ist nicht konstant. Hurwitz $\rightsquigarrow f$ ist injektiv, d.h. $[f : G \to \mathbb{B}] \in \mathcal{F}$. Wir zeigen jetzt die Surjektivität von f:

Sei $0 \in U := f(G) \subsetneq \mathbb{B}$ mit $c \in \mathbb{B} \setminus U$. Der Automorphismus $(-f_c) : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ (6.1.3) schickt $c \mapsto 0 \mapsto -c$, d.h. $0 \notin (-f_c)(U) =: V$. Wie im Beweis von Lemma 43 gibt es ein biholomorphes $p := \sqrt{z} : V \xrightarrow{\sim} W \subseteq \mathbb{B}^*$. Mit $d := p(-c) = \sqrt{-c}$ schickt dann $(-f_d) : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ (6.1.3) $d \mapsto 0$. Insgesamt entsteht

$$\begin{array}{rccccccc}
\Psi: & (U \subsetneq \mathbb{B}) & \xrightarrow[\sim]{-f_c} & (V \subsetneq \mathbb{B}) & \xrightarrow[\sim]{p} & (W \subsetneq \mathbb{B}) & \xhookrightarrow{-f_d} & \mathbb{B} \\
& c & \longmapsto & 0 & & & & \\
& 0 & \longmapsto & -c & \longmapsto & d & \longmapsto & 0,
\end{array}$$

d.h. $(\Psi \circ f) \in \mathcal{F}$. Im Gegensatz zu Ψ ist Ψ^{-1} auf dem gesamten $\mathbb{B}$ definiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{B} & \xleftarrow[\sim]{-f_c^{-1}} & \mathbb{B} & \xleftarrow{p^{-1}} & \mathbb{B} & \xleftarrow[\sim]{-f_d^{-1}} & \mathbb{B} \ : \Psi^{-1} \\
& & z^2 & \longleftarrow\!\!| & z & &
\end{array}$$

Schwarz $\rightsquigarrow |(\Psi^{-1})'(0)| \leq 1$, und "$=$" entfällt, da Ψ^{-1} wegen $p^{-1} : z \mapsto z^2$ kein Isomorphismus sein kann. Also ist $|\Psi'(0)| > 1$ und damit $|(\Psi \circ f)'(0)| > M$. □

8.5. **Äquvalente Charakterisierungen von Elementargebieten.**

Folgende Eigenschaften eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{C}$ sind äquivalente Beschreibungen für die Qualifizierung zum "Elementargebiet":

(1) $G \cong \mathbb{B}$ oder $G = \mathbb{C}$
(2) G ist einfach zusammenhängend ($\nearrow$(7.1))
(3) Für geschlossene Kurven und holomorphe f ist $\int_\gamma f dz = 0$.
(4) Holomorphe $f : G \to \mathbb{C}$ haben eine Stammfunktion.
(5) Holomorphe $f : G \to \mathbb{C}^*$ haben einen Logarithmus.
(6) Holomorphe $f : G \to \mathbb{C}^*$ haben eine Quadratwurzel ("G ist speziell").

(1)⇒(2), da $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ konvex sind; (2)⇒(3) ist Satz 31; (3)⇔(4) ist Satz 9; die Implikationskette (4)⇒(5)⇒(6) ist der Inhalt von (4.4); (6)⇒(1) ist Theorem 44.

Diese sechs Eigenschaften sind außerdem äquivalent dazu, daß $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus G$ zusammenhängend ist (Alexander-Dualität):

Proof. (⇒) Sei $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus G = F_1 \sqcup F_2$ die disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener, also kompakter Teilmengen; seien $U_i := \mathbb{P}^1 \setminus F_i$ (offen). Falls $\infty \notin F_1 \rightsquigarrow \infty \notin U_2$, und wir erhalten $F_1 \subseteq U_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $G = U_2 \setminus F_1$. Damit kann $\gamma : [0,1] \to U_2$ konstruiert werden, das F_1 "umrundet", also in G nicht kontrahierbar ist: Mit $0 \in F_1$ betrachten wir $\gamma(t) := d(t) \cdot e^{2\pi i t} \in U_2$ mit hinreichend großem $d(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ $(\gamma \cap F_1 = \emptyset) \rightsquigarrow$ schon in $U_2 \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht kontrahierbar.

(⇐) (*Idee*) Sei γ ein geschlossener Weg in $G \rightsquigarrow \infty \in (\mathbb{P}^1 \setminus G) \subseteq (\mathbb{P}^1 \setminus \gamma([0,1]))$ ist also in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente enthalten. Dann kann aber γ innerhalb von G kontrahiert werden. □

9. Elliptische Funktionen

10.7.17 (22) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ("Riemannsche Fläche") – der Körper der meromorphen Funktionen ist $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z)$ (siehe Satz 28 in (6.4)), und topologisch ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$. Wir konstruieren hier ein zweites Beispiel ("Elliptische Kurven"); topologisch gibt das den Torus $S^1 \times S^1$.

9.1. **Doppelperiodische Funktionen.** Wir fixieren ein Gitter $L := \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \subset \mathbb{C}$; $\mathcal{M}_L(\mathbb{C}) := \{L\text{-periodische meromorphe Funktionen}\} = \{f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\} =: \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ ist ein Körper; holomorphe $f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}$ sind konstant (Liouville).

Satz 45 (Liouville)**.** 1) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L) \setminus \mathbb{C} \Rightarrow$ *alle* $\#f^{-1}(b)$ *sind endlich und* (mit Vielfachheiten) *unabhängig von* $b \in \mathbb{P}^1$ $(=: \mathrm{Ord}(f))$.
2) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L) \setminus \{\infty\} \Rightarrow \#\{\mathrm{Pole}\} = \mathrm{Ord}(f)$ *und* $\sum_{p \in \mathbb{C}/L} \mathrm{res}(f,p) = 0$.

Proof. (2) Pole sind diskret in kompakter Menge; $\sum_{p\in\mathbb{C}/L} \mathrm{res}(f,p) = \int_\square f\,dz = 0$ mit $\square := c + \partial\,\mathrm{conv}\{0, \omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2\}$.
(1) $g := f'/f \Rightarrow \mathrm{ord}(f,p) = \mathrm{res}(g,p) \Rightarrow \#f^{-1}(0) - \#f^{-1}(\infty) = \sum \mathrm{ord}(f,p) = 0$. Für andere $b \in \mathbb{C}$ betrachte man $f_b(z) := f(z) - b$. $\square$

$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L) : \mathrm{Ord}(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathbb{C}$, und $\mathrm{Ord}(f) = 1$ kommt nicht vor (einfacher Pol $\rightsquigarrow \mathrm{res} \neq 0$). Wir konstruieren in (9.2) $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ mit Doppelpol in 0.
Verzweigungspunkt $b \in \mathbb{C} :\Leftrightarrow$ in $f^{-1}(b)$ gibt es nicht-triviale Vielfachheiten $\Leftrightarrow \exists a \in f^{-1}(b) : f'(a) = 0$. (Die Ableitung f' ist auch L-periodisch).

9.2. **Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion.** [FB06, S.266] Die Reihe $\sum_{\mathbb{Z}^2\setminus 0} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$
12.7.17 (23) konvergiert für $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ (Vergleich mit $\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1(0)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ und Berechnung mit Polarkoordinaten). Insbesondere konvergiert $\sum_{\omega\in L\setminus 0} \frac{1}{|\omega|^s}$ für $s \in \mathbb{R}_{>2}$ ($(x,y) \mapsto \frac{|x\omega_1+y\omega_2|^2}{|x|^2+|y|^2}$ ist homogen und hat auf S^1 ein positives Minimum). $G_n := \sum_{\omega\in L\setminus 0} \frac{1}{\omega^n}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 3})$ heißt Eisensteinreihe.

Satz 46. $\wp(z,L) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L\setminus 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$ *konvergiert für* $z \in \mathbb{C} \setminus L$ *absolut, und* $\wp$ *wird damit zu einer meromorphen Funktion mit zweifachen Polen in* $z \in L$. *Außerdem gilt* $\wp(-z,L) = \wp(z,L)$.

Proof. $z \in B_r(0) \rightsquigarrow$ für $|\omega| \geq 2r$ gilt $\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \frac{|z|\cdot|2\omega-z|}{|z-\omega|^2\cdot|\omega|^2} \leq \frac{r\cdot 3|\omega|}{(|\omega|/2)^2\cdot|\omega|^2} = \frac{12\,r}{|\omega|^3}$, d.h. nach Satz 16 (Morera) ist der $(|\omega| \geq 2r)$-Teil von $\wp$ holomorph. Es bleiben nur endlich viele Summanden (und diese zeigen die Pole). $\square$

Theorem 15 (verallg. Cauchy-Integralformeln) $\rightsquigarrow$ Reihen aus holomorphen Funktionen sind kompatibel mit deren Ableitung $\Rightarrow \wp'(z) = -2\sum_{\omega\in L}(z-\omega)^{-3}$ mit $\wp' \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ (ungerade, L-periodisch und holomorph, bis auf dreifachen Pol in L). Insbesondere gilt $\wp(z) = \int_{z_0}^z \wp'(z)\,dz$ (wegunabhängig, da $\mathrm{res}(\wp') = 0$).

Folgerung 47. $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$.

Proof. Für primitive $\omega_0 \in L$ gilt $\big(\wp(z+\omega_0) - \wp(z)\big)' = \wp'(z+\omega_0) - \wp'(z) = 0$, d.h. $\wp(z+\omega_0) - \wp(z) = c$. Man setze nun $z := -\omega_0/2 \in \mathbb{C} \setminus L$. $\square$

9.2.1. *Die Laurentreihe von $\wp(z)$ in 0.* Hat die Form $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ mit $a_{2n} = \frac{1}{(2n)!}(\wp - \frac{1}{z^2})^{(2n)}(0) = (2n+1)\, G_{2(n+1)}$ (man leite $(z-w)^{-2}$ $2n$-mal ab).

9.2.2. *Die Halbwerte der $\wp$-Funktion.* $\wp'$ ist ungerade $\rightsquigarrow$ die drei Nullstellen von $\wp'$ (Ord $= 3$) sind einfach, und zwar genau $\{\omega_1/2,\, \omega_2/2,\, (\omega_1+\omega_2)/2\} = \frac{1}{2}L \setminus L$. Damit sind die *Halbwerte* $e_1 := \wp(\omega_1/2)$, $e_2 := \wp(\omega_2/2)$, $e_3 := \wp((\omega_1+\omega_2)/2)$ alle $\wp$-verzweigt und damit (wegen $\mathrm{Ord}(\wp) = 2$) auch paarweise verschieden. Der vierte Verzweigungspunkt ist ∞ – hier ist L das einzige Urbild bzgl. $\wp$.

9.3. **Der Körper der elliptischen Funktionen.** $\mathbb{C}(\wp) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{C}/L) =$ Körper der "*elliptischen Funktionen*". Wir wollen diesen näher bestimmen: 17.7.17 (24)

Satz 48. 1) {Gerade elliptische Funktionen mit Pol höchstens in L} $= \mathbb{C}[\wp]$.
2) {Gerade elliptische Funktionen} $= \mathbb{C}(\wp)$.

Proof. (1) Wir betracheten die Laurent-Entwicklungen um 0. Falls $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ gerade mit $\mathrm{Ord}(f) = 2n$, dann ist $f(z) = a_{-2n}\frac{1}{z^{2n}} + \ldots$, d.h. $g(z) := f(z) - a_{-2n}\,\wp^n(z)$ ist eine gerade elliptische Funktion mit Pol höchstens in L und $\mathrm{Ord}(g) < 2n$.

(2) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ gerade mit Pol in $a \in \mathbb{C} \setminus L \Rightarrow \big(\wp(z) - \wp(a)\big)^N \cdot f(z)$ ist holomorph in a für $N \gg 0$. $\square$

Theorem 49. *$\mathcal{M}(\mathbb{C}/L) = \mathbb{C}(\wp, \wp') = \mathbb{C}(\wp) \oplus \mathbb{C}(\wp)\, \wp'$, d.h. insbesondere ist $\mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{C}(\wp)$, und $\wp'$ ist ein Erzeuger.*

Proof. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L) \rightsquigarrow f_0 := \frac{1}{2}\big(f(z) + f(-z)\big)$ und $f_1 := \frac{1}{2}\big(f(z) - f(-z)\big)$ geben mit $f = f_0 + f_1$ die (eindeutige) Zerlegung in gerade/ungerade Summanden. Und dann sind f_0, $(f_1/\wp') \in \mathbb{C}(\wp)$. $\square$

Satz 48(1) kann nun explizit auf $f := (\wp')^2$ angewandt werden: Es genügt, eine lineare Abhängigkeit der 1 und der $z^{\le 0}$-Teile der geraden Funktionen unter den

$\wp = \frac{1}{z^2} + 3\,G_4\,z^2 + 5\,G_6\,z^4 + \ldots$
$\wp^2 = \frac{1}{z^4} + 6\,G_4\,z^0 + 10\,G_6\,z^2 + \ldots$
$\wp^3 = \frac{1}{z^6} + 9\,G_4\,\frac{1}{z^2} + 15\,G_6\,z^0 + \ldots$
$\wp' = -2\frac{1}{z^3} + 6\,G_4\,z + 20\,G_6\,z^3 + \ldots$
$(\wp')^2 = 4\frac{1}{z^6} - 24\,G_4\,\frac{1}{z^2} - 80\,G_6\,z^0 + \ldots,$

d.h. auf den Koeffizienten in $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\frac{1}{z^6}, \frac{1}{z^4}, \frac{1}{z^2}, 1\}$ zu finden. Und das ergibt

$$(\wp')^2(z) = 4\,\wp^3(z) - 60\,G_4\,\wp(z) - 140\,G_6.$$

Beispiel: Daraus entstehen weitere Gleichungen, z.B. durch Differenzieren: $2\wp'\wp'' = 12\wp^2\wp' - 60\,G_4\wp'$, also $2\wp'' = 12\wp^2 - 60\,G_4$. Und diese Gleichungen implizieren polynomiale Abhängigkeiten unter den $G_n = G_n(L)$.

Schließlich entsteht $\Phi : \mathbb{C}/L \longrightarrow \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $z \mapsto \big(\wp(z), \wp'(z)\big) = \big(1 : \wp(z) : \wp'(z)\big)$

und $0 \mapsto (0:0:1)$. Das Bild ist die *"elliptische" Kurve* $E \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ mit der Gleichung $y^2 = 4\,x^3 - 60\,G_4\,x - 140\,G_6$ (affin), bzw. $z_0 z_2^2 = 4\,z_1^3 - 60\,G_4\,z_0^2 z_1 - 140\,G_6\,z_0^3$ (projektiv). Die drei Nullstellen des Polynoms in x auf der rechten Seite sind die Halbwerte e_1, e_2, e_3 aus (9.2.2).

9.4. **Übertragung des Additionsgesetzes.** Auf $\mathbb{C}/L$ induziert $(\mathbb{C}, +)$ ein Gruppengesetz; wir übertragen diese Struktur nach E – zunächst ist nur klar, daß das neutrale Element $0_E = \Phi(0) = (0:0:1)$ ist. Das ist der einzige Punkt in $E \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2)$.

Proposition 50. *Seien $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ und $\square$ wie in Satz 45* (also $\sum_{p \in \mathbb{C}/L} \operatorname{ord}(f,p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\square f'/f\, dz = 0$). *Dann gilt* $\sum_{p \in \mathbb{C}/L} \operatorname{ord}(f,p)\, p = \frac{1}{2\pi i} \int_\square z\, f(z)'/f(z)\, dz \in L$.

Proof. 1) Lokal um $p \in \mathbb{C}/L$ ist $z\, f'/f = \frac{z\,(z-\alpha)^{n\prime}}{(z-\alpha)^n} = \frac{nz}{(z-\alpha)} = n + \frac{n\,\alpha}{(z-\alpha)}$.

2) Mit $g(z) := z\, f'/f$ unterscheiden sich und $\int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} g(z)\, dz = \int_a^{a+\omega_2} g(z+\omega_1)\, dz$ und $\int_a^{a+\omega_2} g(z)\, dz$ um $\int_a^{a+\omega_2} \omega_1\, f'/f dz$. Ansatz: $f(z) = \exp(h(z))$ (in Umgebung des Weges $a \rightsquigarrow a+\omega_2$); $\rightsquigarrow \int_a^{a+\omega_2} \omega_1\, h'(z)\, dz = \omega_1(h(a+\omega_2) - h(a)) \in 2\pi i L$. $\square$

Seien $u, v \in \mathbb{C}/L$; wir wenden Proposition 50 an auf $f(z) := \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \end{pmatrix}$; diese Funktion ist affin-linear in $\wp(z)$, $\wp'(z)$, d.h. sie hat einen dreifachen Pol in $0 = L$. Sie hat Nullstellen in u und $v \rightsquigarrow$ auch in $-(u+v)$. Also liegen die Punkte $\Phi(u), \Phi(v), \Phi(-(u+v)) \in E$ auf einer Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Gruppengesetz in E: Falls $g \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine Gerade ist, so ist die Summe der drei Punkte $E = \{P, Q, R\} = g \cap E$ Null, also 0_E.
Spezialfall: Vertikale Gerade $[x = c] \widehat{=} [c_0\, z_0 + c_1\, z_1 = 0]$ enthält $0_E = (0:0:1)$ und $P, Q \in E \cap \mathbb{C}^2 \rightsquigarrow P + Q + 0_E = 0_E$, d.h. $Q = -P$.

Ende der VL

Literatur

[FB06] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie 1.* Berlin: Springer, 4th corrected and expanded ed. edition, 2006.

[Hur64] Adolf Hurwitz. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie von R. Courant. Mit einem Anhang von K. Röhrl. 4. vermehrte und verbesserte Auflage. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 3. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. xiii, 706 S. (1964)., 1964.

[Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry. An introduction.* Berlin: Springer, 2005.

[Koc86] Helmut Koch. Einführung in die klassische Mathematik. I: Vom quadratischen Reziprozitätsgesetz bis zum Uniformisierungssatz. Mathematische Lehrbücher und Monographien. I. Abteilung: Mathematische Lehrbücher, Bd. 38. Berlin: Akademie-Verlag. 326 S.; M 48.00; Bestell- Nr.: 763 4780 (6903/1) (1986)., 1986.

[RS02] Reinhold Remmert and Georg Schumacher. *Funktionentheorie 1.* Berlin: Springer, 5., neu bearb. aufl. edition, 2002.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

VL "Funktionentheorie"
FU Berlin, Sommer 2017

1. Aufgabenblatt zum 25.4.2017

Aufgabe 1.1. Für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir den "oberen Grenzwert" als $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n \mid n \geq k\}$

a) Man zeige, daß der obere Grenzwert einer beschränkten Folge immer existiert.

b) Man zeige, daß der obere Grenzwert einer beschränkten Folge der größte Häufungspunkt dieser Folge ist.

Lösung: (a) Sei $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ bildet dann $y_k := \sup\{x_n \mid n \geq k\}$ eine ebenfalls durch M beschränkte Folge. Diese Folge ist aber sogar monoton (fallend) und damit konvergent.

(b) Seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$; dann existieren ein $k > N$ mit $|\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n - y_k| < \varepsilon$ und ein $m \geq k$ mit $|y_k - x_m| < \varepsilon$. Die $\triangle$-Ungleichung liefert dann $|\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n - x_m| < 2\varepsilon$. Der obere Grenzwert ist also ein Häufungspunkt.

Sei andererseits $a > \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Wir wählen ein a' zwischen diesen beiden Zahlen, z.B. $a' = \frac{1}{2}(a + \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, und ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $y_k < a'$ für alle $k \geq N$. Damit sind aber auch alle x_n mit $n \geq k \geq N$ in $(-\infty, a']$ enthalten, und a kann kein Häufungspunkt dieser Folge sein.

Aufgabe 1.2. a) Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sei $\overline{z} := a - bi \in \mathbb{C}$ die sogenannte "zu z konjugiert komplexe Zahl". Man zeige, daß damit $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ und $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt.

b) Man stelle die komplexe Zahl $z = \frac{2+3i}{5-4i}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

c) Man stelle die komplexe Zahl $w = \frac{2-3i}{5+4i}$ in der Form $w = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

d) Sei $\mathbb{H} := \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{C}$ die „obere Halbebene". Man prüfe, ob für $z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ stets $1/z \in \mathbb{H}$ oder $-1/z \in \mathbb{H}$ gilt.

Lösung: (a) $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd) + (bc+ad)i} = (ac-bd) - (bc+ad)i$; andererseits ist $\overline{(a+bi)} \cdot \overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (bc+ad)i$.

(b) $z = \frac{2+3i}{5-4i} = \frac{(2+3i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{-2+23i}{41} = -\frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$.

(c) $w = \overline{z} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$ (denn die Konjugation ist auch zur Division kompatibel).

(d) Die Zahl $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ist (für $z \neq 0$) positiv und reell. Also ist $1/z = \overline{z}/|z|^2$ in der jeweils entgegengesetzten Halbebene. Für $z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ gilt damit stets $1/z \in -\mathbb{H}$, also $-1/z \in \mathbb{H}$. Dagegen ist $1/z \in H \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.3. a) Sei $P \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizieneten. Man zeige, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $P(\alpha) = 0$ („α ist Nullstelle von P") auch $\overline{\alpha}$ eine Nullstelle von P ist.

b) Man gebe ein Gegenbeispiel für die Aussage von (a), wenn P nicht reelle sondern komplexe Koeffizienten hat.

Lösung: (a) Sei $P(z) = \sum_j a_j z^j$. Dann gilt $\overline{P(\alpha)} = \sum_j \overline{a_j} \cdot \overline{\alpha}^j = \sum_j a_j \cdot \overline{\alpha}^j = P(\overline{\alpha})$. Aus $P(\alpha) = 0$ folgt also stets $P(\overline{\alpha}) = 0$.

(b) $P(z) := z - i$ hat genau die Nullstelle $i \in \mathbb{C}$ – und nicht $\overline{i} = -i$.

Aufgabe 1.4. $\mathbb{C}$ ist ein zweidimensionaler reeller Vektorraum, und wir können $\{1, i\}$ als Basis wählen. Sei $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$).

a) Man bestimme die zur Multiplikationsabbildung $m_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \alpha \cdot z$ gehörige Abbildungsmatrix.

b) Was ist ihre Determinante; läßt sich diese direkt durch α ausdrücken?

Lösung: (a) Die Gleichungen $m_\alpha(1) = \alpha = a + ib$ und $m_\alpha(i) = i\alpha = -b + ia$ übersetzen sich in die Matrix $M_\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(b) $\det M_\alpha = a^2 + b^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2$.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

2. Aufgabenblatt zum 2.5.2017

Aufgabe 2.1. a) Man untersuche das (absolute?) Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$. Was ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?

b) In den Fällen, in denen die Reihe konvergiert, bestimme man ihren Grenzwert. (*Tip:* Man berechne zunächst das Cauchy-Produkt $(\sum_n z^n) \cdot (\sum_n z^n)$.)

Lösung: (a) Falls $|z| < 1$, so sichert das Quotientenkriterium absolute Konvergenz. Im Fall $|z| \geq 1$ konvergiert $n\, z^n$ nicht gegen Null; die Reihe konvergiert also nicht. Der Konvergenzradius ist also $R = 1$.

(b) Zunächst erinnern wir an die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$. Dann gilt $(\sum_{i=0}^{\infty} z^i) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} z^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} z^i\, z^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$. Also folgt $\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Aufgabe 2.2. Sei $p : S^2 \setminus \{N := (0,0,1)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ die stereographische Projektion aus (1.1).

a) Sei $(x,y,h) \in S^2 \setminus \{N := (0,0,1)\}$. Was ist $|p(x,y,h))|$?

b) Übertragen Sie die Abbildung $s : S^2 \setminus \{\pm N\} \to S^2 \setminus \{\pm N\}$, $s(x,y,h) := (x,y,-h)$ mittels p auf $\mathbb{C}$, d.h. definieren Sie $t : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mittels $t := p \circ s \circ p^{-1}$. Wie sieht $t(z)$ für $z \in \mathbb{C}^*$ explizit aus?

c) Übertragen Sie die Abbildung $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto -1/\overline{z}$ mittels p zu einer Abbildung $S^2 \to S^2$ (oder, genauer, $S^2 \setminus \{\pm N\} \to S^2 \setminus \{\pm N\}$). Welche Abbildung entsteht dabei?

d) Die Abbildung t aus (b) ist (mittels Identifizierung von $\mathbb{C}^* \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) aus der Elementargeometrie bekannt. Wie heißt sie dort?

Lösung: (a) $|p(x,y,h))|^2 = \frac{x^2+y^2}{(1-h)^2} = \frac{1-h^2}{(1-h)^2} = \frac{1+h}{1-h} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, also $|p(x,y,h))| = \sqrt{\frac{1+h}{1-h}}$.

(b) Einerseits ändern s und p und damit auch t nichts an der Richtung von $z = (x,y)$, d.h. $t(z) = \lambda \cdot z$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, und andererseits gilt nach (a) $\lambda \cdot |z|^2 = |z| \cdot |t(z)| = 1$. Also ist $t(z) = z/|z|^2 = 1/\overline{z}$.
Alternativ kann man aus (a) auch das h und damit $p^{-1}(z) = \big((1-h)z,\, h\big)$ explizit berechnen: Es gilt $h(z) = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$.

(c) Diese Abbildung unterscheidet sich von (b) nur um das Vorzeichen. Auf der „S^2-Seite" entsteht also die Abbildung $(x,y,h) \mapsto (-x,-y,-h)$, d.h. die antipodale Abbildung. Diese ist mittels $\pm N \mapsto \mp N$ sogar auf die ganze S^2 stetig fortsetzbar.

(d) Spiegelung am Einheitskreis.

Aufgabe 2.3. a) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß $m := \frac{a+b}{2} \in \mathbb{C}$ dem Mittelpunkt der Strecke ab entspricht.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$. Analog zu (a) ist $s := \frac{a+b+c}{3}$ der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle(a, b, c)$. Man zeige, daß s auf der Strecke cm liegt und diese im Verhältnis 2:1 teilt.

Lösung: (a) Es gilt $b - m = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} - a = m - a$.

(b) Es ist zu zeigen, daß $c - s = 2(s - m)$ gilt. Das folgt aber direkt aus

$$c - s = \tfrac{1}{3}(3c - a - b - c) = \tfrac{1}{3}(2c - a - b)$$

und

$$s - m = \tfrac{1}{6}(2a + 2b + 2c - 3a - 3b) = \tfrac{1}{6}(2c - a - b).$$

Aufgabe 2.4. a) Sei $\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{C}$ ein Unterring des Matrizenrings $\mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ ist, der isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Welche Matrix entspricht dabei $i \in \mathbb{C}$?

b) Sei $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \;\middle|\; z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{M}(2, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, daß H ein Unterring des Matrizenrings $\mathbb{M}(2, \mathbb{C})$ ist.

c) Zeigen Sie, daß die Determinante der Matrizen $M \in \mathcal{H}$ nicht-negative reelle Zahlen sind (sogar > 0 falls $M \neq 0$) und daß mit $M \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ auch $M^{-1} \in \mathcal{H}$ gilt.

d) $\mathcal{H}$ ist ein zweidimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, bzw. ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer dazu kompatiblen Multiplikation. Ist $\mathcal{H}$ ein Körper?

(*Tip:* Berechnen Sie alle möglichen oder zumindest einige Produkte zwischen $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.)

Lösung: (a) Wir benutzen die Zuordnung $(\alpha \in \mathbb{C}) \mapsto m_\alpha \mapsto M_{m_\alpha}$ von Aufgabe 1.4. Dabei geht $i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; eine mögliche andere Zuordnung wäre aber auch das Negative dieser Matrix.

(b) $\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az - \overline{b}w & -\overline{a}w - bz \\ a\overline{w} + \overline{bz} & \overline{az} - b\overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (az - \overline{b}w) & -(\overline{a}w + bz) \\ \overline{\overline{a}w + bz} & \overline{az - \overline{b}w} \end{pmatrix}$,
und die Kompatibil;ität mit der Addition klappt sowieso.

(c) $\det \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} = |z|^2 + |w|^2$ und $\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} \cdot \begin{pmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{pmatrix}$.

(d) Es gilt $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ und $IJ = K = -JI$, $JK = I = -KJ$ und $KI = J = -IK$. Ins besonder ist $\mathcal{H}$ ein *Schief*-körper, d.h. ein nicht-kommutativer Körper.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

3. Aufgabenblatt zum 9.5.2017

Aufgabe 3.1. a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Funktion $z \mapsto z^2$. Schreiben Sie diese komplexe Funktion als $F := \binom{u}{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit reellen Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ (mit $z = x + iy$ und $f = u + iv$).

b) Bestimmen Sie die reelle (2×2)-Matrix $F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ in einem beliebigen Punkt $z = x + iy$.

c) Bestimmen Sie die komplexe (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}$ und daraus die komplexe (1×2)-Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}$.

Lösung: (a) $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2)+2ixy$, also $u(x,y) = x^2-y^2$ und $v(x,y) = 2xy$.

(b) $F'(x,y) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

(c) Wegen $(\partial_z\ \partial_{\overline{z}}) = \frac{1}{2}(\partial_x\ \partial_y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ ergibt sich zunächst $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & x-iy \\ y-ix & y+ix \end{pmatrix}$ und dann daraus $(2x+2iy\ 0) = (2z\ 0)$.

Aufgabe 3.2. Führen Sie die Schritte (a)-(c) aus Aufgabe 3.1 durch für die Funktionen $z \mapsto \overline{z}$ und $z \mapsto |z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Lösung: (a) Hier sind $(u,v) = (x,-y)$, bzw. $(u,v) = (x^2+y^2,\, 0)$.

(b) $F'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, bzw. $F'(x,y) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Für $f(z) = \overline{z}$ erhält man $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ und dann daraus $(0\ 1)$. Für $f(z) = |z|^2$ erhält man $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-iy & x+iy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und dann daraus $(x-iy\ x+iy) = (\overline{z}\ z)$.

Aufgabe 3.3. a) Untersuchen Sie die drei Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f : z \mapsto z^2, \overline{z}, |z|^2$ direkt auf komplexe Differenzierbarkeit, d.h. prüfen Sie, ob die Differenzenquotienten $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für $h \to 0$ konvergieren. Und falls das der Fall ist, bestimmen Sie die Ableitung.

b) Schreiben Sie die drei Funktionen aus (a) als Polynome in z und $\overline{z}$ und bilden Sie dann die (naiven) partiellen Ableitungen $\partial f/\partial z$ und $\partial f/\partial \overline{z}$ aus dieser Darstellung heraus. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (c) aus den Aufgaben 3.1 und 3.2.

Lösung: (a) Die Differenzenquotienten sind $\frac{(z+h)^2-z^2}{h} = \frac{2zh+h^2}{h} = 2z + h \to z$, also $(z^2)' = 2z$, und $\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$ und $\frac{(z+h)(\overline{z+h})-z\overline{z}}{h} = \frac{z\overline{h}+\overline{z}h+h\overline{h}}{h} = z\frac{\overline{h}}{h} + \overline{z} + \overline{h}$. Für die beiden letzten existiert der Grenzwert nicht, da $\overline{h}/h$ für z.B. $h = t$ oder $h = it$ mit $\mathbb{R} \ni t \to 0$ verschiedene Grenzwerte (nämlich 1, bzw. -1) hat.

Aufgabe 3.4. a) Zeigen Sie direkt, daß $\exp' = \exp$ gilt.

b) Berechnen Sie die Ableitung des Hauptzweiges des Logarithmus $\log : (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}) \to \mathbb{C}$, $w \mapsto \log(w)$. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man andere Zweige von log betrachtet?

Lösung: (a) $\frac{\exp(z+h)-\exp(z)}{h} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{(z+h)^\nu - z^\nu}{\nu! \cdot h} = \sum_{\nu \geq 1} \left(\frac{\nu \cdot z^{\nu-1} \cdot h}{\nu! \cdot h} + h \cdot \text{Polynom in } z, h \right)$, und das konvergiert für $h \to 0$ gegen $\sum_{\nu \geq 1} \frac{z^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = \exp(z)$.

(b) Unabhängig von der Auswahl des Zweiges ist $\log = \exp^{-1}$, d.h. $\log'(w) = 1/\exp'(\log(w)) = 1/\exp(\log(w)) = 1/w$. Das ist aber auch nicht erstaunlich, da sich die verschiedenen Zweige nur um Konstanten $(+2\pi i\mathbb{Z})$ unterscheiden und diese nach dem Ableiten nicht mehr relevant sind.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

VL "Funktionentheorie"
FU Berlin, Sommer 2017

4. Aufgabenblatt zum 16.5.2017

Aufgabe 4.1. a) Welche der vier Teilmengen $U_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ $U_2 = [\frac{1}{2}, 1)$, $U_3 = (\frac{1}{2}, 1]$, $U_4 = [\frac{1}{2}, 1]$ von $[0,1]$ ist offen in $[0,1]$? Welche sind abgeschlossen?

b) Man zeige, daß das reelle Interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist, d.h. daß es keine offene Teilmengen $\emptyset \neq U, V \subsetneq [0,1]$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = [0,1]$.

Lösung: (a) U_1 und U_3 sind offen in $[0,1]$; U_2 und U_4 sind es nicht. Und nur U_4 ist abgeschlossen.

(b) Seien $\emptyset \neq U, V \subseteq [0,1]$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = [0,1]$. Sei o.B.d.A. $1 \in V$. Mit $u := \sup U$ unterscheiden wir zwei Fälle:
(i) Falls $u \in U$, dann ist $u < 1$ und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $[u, u+\varepsilon) \subseteq U$. Damit wäre aber $u + \varepsilon \leq \sup U = u$. Widerspruch.
(ii) $u \in V$. Dann ist $\emptyset \neq U \subseteq [0, u)$, also $u \neq 0$. Damit ist $(u - \varepsilon, u] \subseteq V$, also $U \subseteq [0, u-\varepsilon]$, d.h. $u = \sup U \leq u - \varepsilon$. Widerspruch.

Aufgabe 4.2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, daß f konstant ist.

Lösung: $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $v = 0$. Also ist $\partial_x u = \partial_y v = 0$ und $\partial_y u = -\partial_x v = 0$.

Aufgabe 4.3. Bezeichne (für $c \in \mathbb{R}_{>0}$) $c \cdot S^1$ den geschlossenen Weg $t \mapsto c \cdot \exp(2\pi i\, t)$ in $\mathbb{C}$.

a) Berechnen Sie die Integrale $\int_{c \cdot S^1} \frac{dz}{z}$ und $\int_{c \cdot S^1} \overline{z} \cdot dz$.

b) Sei γ der Weg, der sich aus den folgenden vier Teilstücken zusammensetzt (auf die spezielle Wahl einer Parametrisierung kommt es ja nicht an):
(i) S^1 (von 1 nach 1),
(ii) $t \mapsto t$ (von 1 nach 2),
(iii) $-(2 \cdot S^1)$ (der zu $2S^1$ entgegengesetzte Weg von 2 nach 2) und
(iv) $t \mapsto -t$ (von 2 nach 1).
Skizzieren Sie γ, schraffieren Sie das Gebiet, das γ „umrundet" und berechnen Sie $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ und $\int_\gamma \overline{z} \cdot dz$.

Lösung: (a) Auf $c\,S^1$ ist $\overline{z} = \frac{c^2}{z}$. Aus $\int_{c \cdot S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{1}{c \cdot \exp(2\pi i t)} \cdot c \cdot \exp(2\pi i t) \cdot 2\pi i\, dt = 2\pi i$ folgt also $\int_{c \cdot S^1} \overline{z} \cdot dz = 2\pi i c^2$.

(b) Die Integrale (ii) und (iv) müssen nicht berechnet werden – es handelt sich hier um entgegengesetzte Wege, also heben sich die entsprechenden Summanden gegenseitig weg. Die beiden gesuchten Integrale setzen sich damit nur aus den jeweils zwei Summanden aus (i) und (iii) zusammen: $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi\, i - 2\pi\, i = 0$ und $\int_\gamma \overline{z} \cdot dz = 2\pi\, i - 2\pi\, i \cdot 4 = -6\pi\, i$.

Aufgabe 4.4. a) Sei $\Phi : U' \to U$ eine komplex differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen $U, U' \subseteq \mathbb{C}$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \to U'$ ein Weg. Man zeige, daß $\int_\gamma (f \circ \Phi)\, \Phi'\, dz = \ = \int_{\Phi\circ\gamma} f\, dz$ gilt.

b) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $U' = U - c$. Man zeige, daß $\int_\gamma f(z + c)\, dz = \int_{\gamma+c} f\, dz$ gilt.

Lösung: (a) Es gilt $\int_\gamma (f \circ \Phi)\, \Phi'\, dz = \int_a^b (f \circ \Phi \circ \gamma)(t)\, \Phi'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$ und $\int_{\Phi\circ\gamma} f\, dz = \int_a^b (f \circ \Phi \circ \gamma)(t)\, (\Phi \circ \gamma)'(t)\, dt$. Damit folgt die Gleichheit aus der Kettenregel.

(b) Hier ist $\Phi(z) = z + c$, und das impliziert $\Phi'(z) = 1$.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

VL "Funktionentheorie"
FU Berlin, Sommer 2017

5. Aufgabenblatt zum 23.5.2017

Aufgabe 5.1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \exp(-1/z^4)$ für $z \neq 0$ und $f(0) := 0$. Dieses f ist zunächst in $\mathbb{C}^*$ holomorph; wir untersuchen jetzt das Verhalten in 0.

a) Zeigen Sie, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ (mit $z = x + iy$) im Punkt $0 \in \mathbb{C}$ existieren und berechnen Sie diese.

b) Erfüllen die partiellen Ableitungen von f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen?

c) Ist f (in 0) holomorph/ reell differenzierbar/ stetig?

Lösung: (a) + (b) $\lim_{x\to 0} \exp(-1/x^4)/x = 0$ und $\lim_{x\to 0} \exp(-1/(ix)^4)/ix = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Damit sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, und die CR-Dgl sind trivialerweise erfüllt.

(c) Man setze $z := \sqrt[4]{t \cdot i}$ mit $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Das zeigt, daß f nicht stetig ist. Und damit auch nicht reell differnzierbar oder holomorph.

Aufgabe 5.2. a) Seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ Elementarebiete, Man zeige, daß falls $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ zusammenhängend ist, dann auch $G_1 \cup G_2$ ein Elementarebiet ist.

b) Man gebe ein Beispiel, das zeigt, daß die Behauptung ohne die Zusammenhangs-Voraussetzung von $G_1 \cap G_2$ nicht richtig ist.

Lösung: Sei $f : G_1 \cap G_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Damit gibt es Stammfunktionen F_i von $f|_{G_i}$, und da $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend ist, folgt die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $F_2 = F_1 + c$ auf $G_1 \cap G_2$. O.B.d.A. ist $c = 0$ (man ersetze sonst F_2 durch $F_2 - c$), also ist durch $F(z) := F_1(z)$ (für $z \in G_1$) und $F(z) := F_2(z)$ (für $z \in G_2$) korrekt eine Funktion definiert, und diese ist eine Stammfunktion von f auf $G_1 \cup G_2$. (Letzteres überprüft man lokal auf den G_i – dort ist es aber wegen $F = F_i$ erfüllt.)

Aufgabe 5.3. Man zeige, daß die sichelförmige offene Teilmenge $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } |z - 1/2| > 1/2\}$ ein Elementargebiet ist.

Lösung: Für jeden Punkt $P \in S$ mit $|P - 1/2| = 1/2 + \varepsilon$ gibt es zwei Punkte $P_1, P_2 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| = 1/2\}$ (z.B. die Berührungspunkte der Tangenten an den kleinen Kreis durch P), so daß

$$F(P_1, P_2) := \{z \in S \mid \text{der Strahl } [1/2 \to z] \text{ verläuft zwischen } P_1 \text{ und } P_2\}$$

sternförmig (mit z.B. $* = P$) ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge sternförmiger offener Teilmengen $F_n \subseteq S$, so daß der Durchschnitt von $S_n := \cup_{i<n} F_i$ und F_n nicht leer und zusammenhängend ist und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = S$ gilt. Alle S_n sind daher Elementargebiete. Daraus folgt schon, daß S zusammenhängend ist.

Sei nun $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [0, 1] \to S$ ein geschlossener Weg. Da γ stetig auf einem kompakten Intervall ist, folgt, daß es ein n gibt mit $\gamma([0, 1]) \subseteq S_n$. Damit folgt $\int_\gamma f\, dz = 0$.

Aufgabe 5.4. Gilt in $\mathbb{C}$ der aus der reellen Differentialrechnung bekannte Zwischenwertsatz, d.h. gibt es für holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z, w \in \mathbb{C}$ immer ein $\xi \in [z, w]$ (letzteres bezeichnet die Strecke, die z mit w verbindet) mit $\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(\xi)$? (Beweis/Gegenbeispiel)

Lösung: Sei $f(z) := \exp(2\pi i z)$. Es gilt $f(0) = f(1) = 1$ also $f(1) - f(0) = 0$, aber $f'(z) = 2\pi i \cdot \exp(2\pi i z)$ verschwindet nirgends.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

6. Aufgabenblatt zum 30.5.2017

Aufgabe 6.1. Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine auf $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit konstantem Betrag $a > 0$, d.h. es gilt $|f(z)| = a$. Zeigen Sie (ohne Benutzung des Maximum-Prinzips), daß f konstant ist.

Lösung: Lokal um ein $z_0 \in U$ (also z.B. auf $B_r(z_0) \subseteq U$) existiert $F(z) := \log(f(z))$ und ist holomorph. Andererseits folgt aus $|f| = a = \exp(b)$ (für $b := \log(a) \in \mathbb{R}$), daß $F : B_r(z_0) \to b + i\mathbb{R}$. Damit ist $(F-b)/i$ eine holomorphe Funktion $B_r(z_0) \to \mathbb{R}$, was nach Aufgabe 4.2 nicht möglich ist.

Aufgabe 6.2. Sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad n, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Nullstellen von f. Man zeige, daß dann $f'(z)/f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_\nu}$ gilt. (Beide Seiten sind rationale Funktionen, also Elemente von $\operatorname{Quot} \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}(z)$.)

Folgern Sie, daß $Z(f') \subseteq \operatorname{conv} Z(f)$ gilt.

(Wir erinnern: $Z(g) := \{c \in \mathbb{C} \mid g(c) = 0\}$ und $\operatorname{conv}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} := \{\sum_\nu \lambda_\nu \alpha_\nu \mid \lambda_\nu \in [0,1],\ \sum_\nu \lambda_\nu = 1\}$. Dann benutze man $\frac{1}{z-\alpha_\nu} = \frac{\overline{z-\alpha_\nu}}{|z-\alpha_\nu|^2}$.)

Lösung: Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt es vollständig in ein Produkt $f(z) = c \cdot \prod_{\nu=1}^{n}(z - \alpha_\nu)$. Die logarithmische Ableitung $f/f' = \log(f)$ ist „additiv bzgl. Produkten", d.h. es gilt $f'/f = \sum_{\nu=1}^{n} f'_\nu/f_\nu$ mit $f_\nu(z) = z - \alpha_\nu$.

Sei nun $f'(z) = 0$, dann folgt $\sum_\nu \frac{z-\alpha_\nu}{|z-\alpha_\nu|^2} = 0$. Und mit $\lambda_\nu := \frac{1}{|z-\alpha_\nu|^2}$ heißt das $(\sum_\nu \lambda_\nu) \cdot z = \sum_\nu \lambda_\nu \alpha_\nu$.

Aufgabe 6.3. Berechnen Sie die Integrale (a) $\int_{\partial B_r} \frac{\sin z}{z-c}\, dz$ und (b) $\int_{\partial B_r} \frac{1}{z(z-c)}\, dz$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{C} \setminus \partial B_r$. Dabei bezeichne $\partial B_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ mit der üblichen Orientierung.

Lösung: (a) Falls $|c| < r$, d.h. $c \in B_r$, so sagt die Cauchysche Integralformel $\int_{\partial B_r} \frac{\sin z}{z-c} dz = 2\pi i \sin c$. Falls $|c| > r$, so ist ∂B_r eine geschlossene Kurve in dem sternförmigen Gebiet B_R (mit $r < R < |c|$), auf dem die Funktion $\frac{\sin z}{z-c}$ holomorph ist, d.h. das Integral verschwindet nach dem Cauchyschen Integralsatz.

(b) Für $|c| > r$ ist $f(z) := \frac{1}{z-c}$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{B}_r$, also gilt $\int_{\partial B_r} \frac{1}{z(z-c)}\, dz = \int_{\partial B_r} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0) = -\frac{2\pi i}{c}$. Falls $0 < |c| < r$, so benutzen wir $\frac{1}{z(z-c)} = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{z-c} - \frac{1}{z}\right)$. Da beide Integrale $\int_{\partial B_r} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\partial B_r} \frac{1}{z-c}\, dz = 2\pi\, i$ sind, verschwindet ihre Differenz, also $\int_{\partial B_r} \frac{1}{z(z-c)}\, dz = 0$.

Mittels $c \to 0$ bleibt das auch das Ergebnis für $c = 0$; alternativ kann man das aber auch direkt sehen: $\int_{\partial B_r} \frac{1}{z^2}\, dz = 0$ – z.B. wegen der Existenz einer Stammfunktion.

Aufgabe 6.4. a) Sei $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ (u, v sind reelle Funktionen; $z = x+iy$) in $B_r(0)$ holomorph. Man zeige, daß $\Delta u = 0$ (mit $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) gilt („$u$ ist harmonisch“).

b) Sei $u : B_r(0) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch. Man zeige, daß die Funktion $g(z) := u_x - i\, u_y$ holomorph ist. (u_x, u_y bezeichnen die jeweiligen partiellen Ableitungen.)

c) Sei $u : B_r(0) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch. Man zeige, daß es eine (bis auf Kostanten eindeutige) Funktion $v : B_r(0) \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $f := u + iv$ holomorph ist.

d) Welche der vier Abbildungen $u_1(x, y) := x+y$, $u_2(x, y) := x-y$, $u_3(x, y) := x^2 + y^2$, $u_4(x, y) := x^2 - y^2$ sind harmonisch? Nennen Sie gegebenenfalls die zugehörigen holomorphen Funktionen.

Lösung: (a) Die CR-Dgl. sagen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Also folgt $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$. (Die partiellen Ableitungen sind vertauschbar, da u und v zweimal stetig differenzierbar sind).

(b) Wir prüfen die CR-Dgl.: $(u_x)_x - (-u_y)_y = 0$ und $(u_x)_y + (-u_y)_x = 0$ zeigen, daß g holomorph ist.

(c) Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß die Differenz zweier Kandidaten f_1 und f_2 eine holomorphe Funktion $f_1 - f_2 = (u + iv_1) - (u + iv_2) = i(v_1 - v_2)$ geben würde, die dann aber nach Aufgabe 4.2 konstant sein müßte.

Wenn wir $f = u+iv$ gefunden hätten, dann ergäbe sich $f' = u_x+iv_x = u_x-iu_y = g$. Wir beginnen also umgekehrt und bezeichnen mit f eine Stammfunktion von g ($B_r(0)$ ist ein Elementargebiet). Dann ist $f = U(x, y) + iV(x, y)$ holomorph, und wir erhalten $u_x - iu_y = g = f' = U_x - iU_y$, also $U_x = u_x$ und $U_y = u_y$. Daraus folgt $U = u$, und f ist die gesuchte holomorphe Funktion.

(d) $f_1(z) = (1-i) \cdot z$, $f_2(z) = (1+i) \cdot z$ und $f_4(z) = z^2$. Für u_3 gilt $\Delta u_3 = 4 \neq 0$.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

7. Aufgabenblatt zum 6.6.2017

Aufgabe 7.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine weg-zusammenhängende offene Teilmenge. Man zeige, daß sie dann auch strecken-zusammenhängend ist, d.h. daß es für alle $x, y \in U$ einen Streckenzug innerhalb von U gibt, der x und y verbindet.

Lösung: Aus der Voraussetzung folgt, daß U auch zusammenhängend ist. Und nun verläuft der Beweis analog zu dem von Satz 7.

Aufgabe 7.2. Man zeige, daß nicht-konstante, ganze Funktionen (also holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) ein in $\mathbb{C}$ dichtes Bild haben, d.h. daß es keine offene Kreisscheibe $B_r(w_0)$ mit $r > 0$ und $f(\mathbb{C}) \cap B_r(w_0) = \emptyset$ gibt.

Lösung: Falls $f(\mathbb{C}) \cap B_r(w_0) = \emptyset$, so sei o.B.d.A. $w_0 = 0$ (man betrachte sonst $f(z) := f(z) - w_0$). Dann ist $|f(z)| \geq r$ (für alle $z \in \mathbb{C}$), d.h. $g := 1/f$ ist ebenfalls auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $|g| \leq 1/r$. Insbesondere ist g eine beschränkte, ganze Funktion und damit nach dem Satz von Liouville konstant. Damit ist aber auch f konstant.

Aufgabe 7.3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in G$. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(G \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(G \cap \mathbb{R}i) \subseteq \mathbb{R}i$. Man zeige, daß f dann eine ungerade Funktion sein muß, d.h. daß für alle $z \in G \cap (-G)$ gilt: $f(-z) = -f(z)$.

Lösung: Mit f ist auch $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ in einer Umgebug von 0 holomorph. Wegen $g(t) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ folgt $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ für alle z in einer Umgebung von 0.

Analog betrachtet man das in 0 holomorphe $h(z) := -\overline{f(-\overline{z})}$. Für $t \in \mathbb{R}$ (in einer Umgebung von 0) folgt $h(it) = -\overline{f(it)} = f(it)$. Und wieder ergibt sich daraus $-\overline{f(-\overline{z})} = f(z)$ oder auch $\overline{f(\overline{z})} = -f(-z)$ für alle z in einer Umgebung von 0.

Aus beiden Gleichungen ergibt sich dann insgesamt $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = -f(-z)$ für alle z in einer Umgebung von 0. Und wegen des Identitätssatzes gilt diese Gleichung auch für alle $z \in G \cap (-G)$.

Aufgabe 7.4. Gibt es holomorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, bzw.
b) $g(\frac{1}{n}) = g(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$? (Beweis/Beispiel)

Lösung: Für (b) nehme man $g(z) = z^2$.

Für (a) erfüllt $f(z) := z^3$ die erste Bedingung $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$. Wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen ($\{\frac{1}{n}\}$ hat den Häufungspunkt $0 \in \mathbb{C}$) ist das aber die einzige Möglichkeit für f. Aber diese Funktion erfüllt schon für $n = 1$ nicht mehr die Bedingung $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

8. Aufgabenblatt zum 13.6.2017

Aufgabe 8.1. a) Man zeige, daß ein Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ als meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ aufgefaßt werden kann, die in ∞ einen Pol hat. Wie kann man die Polordnung aus dem Polynom f ablesen?

b) Geben Sie ein Beispiel einer meromorphen Funktion g auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, die in ∞ einen zweifachen und in $1-i$ einen einfachen Pol hat (das kann dann also kein Polynom mehr sein).

c) Geben Sie (z.B.) $f = z^2 - 3$ aus (a) und g aus (b) in homogenen Koordinaten $(z_0 : z_1)$ des $\mathbb{P}^1$ an – schreiben Sie f und g jeweils als Quotienten homogener Polynome vom selben Grad. (Die "Standardkoordinate" von $\mathbb{C} = \{(1 : z) \mid z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ergibt sich dann als $z = z_1/z_0$; die Koordinate um ∞ ist $w = 1/z = z_0/z_1$.)

Lösung: (a) Sei $w = 1/z$. Dann gilt $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k\, z^k = \sum_{k=0}^n a_k/w^k = w^{-n} \cdot \sum_{k=0}^n a_k w^{n-k} \in w^{-n}\,\mathbb{C}[w]$. Damit ist die Polordnung genau $\deg(f)$.

(b) z^2 hat einen zweifachen Pol in ∞, ist aber holomorph in allen anderen Punkten des $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dagegen hat $1/(z-1+i)$ einen einfachen Pol in $1-i$. Um das verhalten dieser Funktion in ∞ zu studieren, schreiben wir sie als Funtion in w: $1/(z-1+i) = 1/(1/w-1+i) = w/(1-w+iw)$. Diese Funktion ist in ∞ $(w=0)$ holomorph (und hat dort sogar eine Nullstelle).
Wir definieren $g(z) := z^2 + 1/(z-1+i)$. Den einfachen Pol in $1-i$ sieht man direkt. Das Verhalten von g in ∞ kann folgendermaßen sehen: $h(w) := g(1/w) = \frac{1}{w^2} + \frac{1}{\frac{1}{w}-1+i} = \frac{1}{w^2} + \frac{w}{1-w+iw} = \frac{1}{w^2} \cdot (1 + \frac{w^3}{1-w+iw})$.

(c) $f = z^2 - 3 = (z_1/z_0)^2 - 3 = \frac{z_1^2 - 3z_0^2}{z_0^2}$.
$g = \frac{1}{w^2} \cdot \frac{w^3+1-w+iw}{1-w+iw} = \frac{1}{z_0^2} \cdot \frac{z_0^3+z_1^3-z_0z_1^2+iz_0z_1^2}{z_1-z_0+iz_0}$.

Aufgabe 8.2. Sei G ein Gebiet. Zeigen Sie, daß dann jede injektive, holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung $f : G \xrightarrow{\sim} f(G)$ induziert.

Lösung: Da f injektiv ist, kann es nicht konstant sein – aus der Gebietstreue folgt, daß f offen ist. Damit ist $f : G \xrightarrow{\sim} f(G)$ zunächst ein Homöomorphismus. Die Holomorphie von f^{-1} folgt dann wahlweise aus Satz 4 oder aus der lokalen Darstellung $f = z^n$ in (5.1) – aus der Injektivität von f folgt $n = 1$.

Aufgabe 8.3. Sei $f(z) := z^2 - 1$. Man konstruiere (gemäß (5.1) mit $z_0 = 1$) eine biholomorphe Abbildung $\Phi : B_1(0) \xrightarrow{\sim} U(1)$ $(0 \mapsto 1)$, so daß $(f \circ \Phi)$ in einer Umgebung von 0 die Funktion $z \mapsto z^n$ wird. Was ist n?

Lösung: Da $f(z) = z^2 - 1$ in einer Umgebung von $z = 1$ injektiv ist, muß $n = 1$ gelten. Das bedeutet $(f \circ \Phi)(z) = z$, also $(f \circ \Phi) = \mathrm{id}$. Für Φ ergibt sich damit $\Phi(z) = \sqrt{z+1}$.

Nun ist diese Funktion zwar nicht global (und lokal nicht eindeutig) definiert – aber auf $B_1(0)$ ist $z \mapsto z+1$ eine Abbildung nach $\mathbb{C}^*$, aus der man nach (4.4) die Quadratwurzel ziehen kann. (Oder man macht es direkt, indem man auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ eine der beiden Wurzelfunktionen wählt.)

Aufgabe 8.4. Man zeige, daß holomorphe Funktionen $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ immer konstant sind.

Lösung: Da f in ∞ holomorph und damit insbesondere in einer Umgebung von ∞ (z.B. in $\mathbb{P}^1 \setminus B_R(0)$) beschränkt ist, ist f insgesamt beschränkt. (Alternativ folgt die Beschränktheit einfach aus der Stetigkeit von f zusammen mit der Kompaktheit von $\mathbb{P}^1$.) Dann folgt die Behauptung direkt aus dem Satz von Liouville.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

9. Aufgabenblatt zum 20.6.2017

Aufgabe 9.1. Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z)$ (siehe auch (6.4)).

a) Man zeige, daß nur endlich viele $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zu einer nicht-trivialen Ordnung $\mathrm{ord}_p(f) \neq 0$ führen.

b) Man zeige, daß $\sum_{p\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathrm{ord}_p(f) = 0$ gilt. (Mittels (a) ist die Summe endlich und damit wohldefiniert.)

c) Wir bezeichnen mit $\mathrm{Div}\,\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die freie abelsche Gruppe mit der Basis $\{[p] \mid p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$, d.h. ihre Elemente sind (formale) endliche Summen $\sum_{p\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \lambda_p \cdot [p]$ mit $\lambda_p \in \mathbb{Z}$. Indem man jedes Basiselement $[p]$ auf $1 \in \mathbb{Z}$ sendet entsteht ein Gruppemhomomorphismus $\deg : \mathrm{Div}\,\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$. Man zeige, daß deg surjektiv ist und daß $\mathrm{div}(f) := \sum_{p\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathrm{ord}_p(f) \cdot [p] \in \ker(\deg) \subset \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.

Lösung: (c) ist nur "heiße Luft": Die Surjektivität ist trivial, da jedes $[p]$ auf den Erzeuger $1 \in \mathbb{Z}$ abgebildet wird. Die Tatsache, daß $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ ist, entspricht genau dem Teil (a). Und wegen $\deg\left(\sum_{p\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \lambda_p \cdot [p]\right) = \sum_{p\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \lambda_p$ entspricht $\mathrm{div}(f) \in \ker(\deg)$, also $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ genau dem Teil (b).

(a) Wir schreiben $f = a(z)/b(z)$ mit (bis auf konstanten Faktor) $a(z) = (z - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_k)$ und $b(z) = (z - \beta_1) \cdot \ldots \cdot (z - \beta_l)$. Dann ist $\mathrm{ord}_p(f) = 0$ für $p \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l\}$.

(b) Die Ordnung $\mathrm{ord}_p(f)$ für $p = \alpha_i$ ist genau die Vielfachheit der Nullstelle α_i in $a(z)$. Die Ordnung $\mathrm{ord}_p(f)$ für $p = \beta_j$ ist genau das Negative der Vielfachheit der Nullstelle β_j in $b(z)$. Anders gesagt, $\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^k [\alpha_i] - \sum_{j=1}^l [\beta_j] + (?) \cdot [\infty]$. Nun gilt aber $\mathrm{ord}_\infty\, a(z)/b(z) = -\deg(a) + \deg(b) = l - k$. Der Grund dafür ist $a(z)/b(z) = (1/z)^{l-k} \cdot h(1/z)$ mit $h(0) \neq 0$.

Aufgabe 9.2. a) Sei K ein Körper und $v : K^* \to \mathbb{Z}$ (oder $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit $v(0) = \infty$) eine Bewertung (d.h. $v(fg) = v(f) + v(g)$ und $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$). Man zeige, daß bei $v(f) \neq v(g)$ sogar $v(f+g) = \min\{v(f), v(g)\}$ folgt.

b) Für $v_3 : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ (zählt die Anzahl des Faktors 3 in Zähler und Nenner, d.h. $v_3(3) = 1$ und $v_3(g) = 0$ falls $g \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$) gebe man ein Beispiel für $f, g \in \mathbb{Q}$ mit $v_3(f+g) = 2$ und $v_3(f) = v_3(g) = -1$.

Lösung: (a) Zunächst gilt $v(1) = v(-1) = 0$ (wegen z.B. $v(1) = v(1) + v(1)$). Sei nun o.B.d.A. $v(f) < v(g)$, also $v(f) = \min\{v(f), v(g)\}$. Dann folgt aus $f = (f+g) + (-g)$ die Ungleichung $v(f) \geq \min\{v(f+g), v(-g)\} = \min\{v(f+g), v(g)\}$. Dieses Minimum kann dann aber nur $v(f+g)$ sein (da $v(f) \geq v(g)$ nicht möglich ist). Es gilt also $\min\{v(f), v(g)\} = v(f) \geq v(f+g)$.

(b) $f = 1/3$ und $g = 26/3$ liefern $f + g = 1/3 + 26/3 = 27/3 = 9$.

Aufgabe 9.3. a) Sei $a \in \mathbb{B} := B_1(0)$. Zeigen Sie, daß $f_a(z) := \frac{z-a}{\overline{a}z-1}$ eine holomorphe Abbildung $f_a : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ mit $f_a^{-1} = f_a$ ist.

b) Für $b \in \mathbb{H}$ sei $g_b(z) := \frac{z-b}{z-\overline{b}}$. Zeigen Sie, daß dadurch eine holomorphe Abbildung $g_b : \mathbb{H} \to \mathbb{B}$ induziert wird. und drücken Sie $f_a \circ g_b$ als ein $c \cdot g_\bullet$ (mit $c \in \mathbb{C}_1$) aus.

Lösung: (a) $|\overline{a}z - 1|^2 - |z-a|^2 = a\overline{a}z\overline{z} - a\overline{a} - z\overline{z} + 1 = (|a|^2-1)(|z|^2-1) > 0$ und $f_a(f_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{\overline{a}z-1}-a}{\overline{a}\,\frac{z-a}{\overline{a}z-1}-1} = \frac{(z-a)-a\,(\overline{a}z-1)}{\overline{a}\,(z-a)-(\overline{a}z-1)} = \frac{z(1-a\overline{a})}{1-a\overline{a}} = z.$

(b) $|z-\overline{b}|^2 - |z-b|^2 = b\overline{z} + \overline{b}z - bz - \overline{b}\overline{z} = -(b-\overline{b})(z-\overline{z}) \in -\mathbb{R}_{>0}\, i \cdot \mathbb{R}_{>0}\, i > 0.$ Außerdem ist $f_a \circ g_b = c \cdot g_d$ mit $c = -\frac{1-a}{1-\overline{a}} = -\frac{(1-a)^2}{|1-a|^2}$ und $d = \frac{b-a\overline{b}}{1-a}$.

Aufgabe 9.4. Welche der Gebiete $\mathbb{B}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C}$ sind zueinander biholomorph äquivalent und welche nicht? (Es sind also im Prinzip sechs Aussagen zu machen – und zu begründen).

Lösung: Nach (6.1.4) gilt $\mathbb{B} \cong \mathbb{H}$. Die Gebiete $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ sind sternförmig, also Elementargebiete – aber $\mathbb{C}^*$ ist das nicht $(\int_{\partial B} \frac{dz}{z})$. Damit ist $\mathbb{C}^*$ zu keinem der anderen äquivalent.
Es bleibt der Vergleich von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{B}$ (und damit auch $\mathbb{H}$): Eine (bi-) holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ wäre automatisch beschränkt und müßte damit nach Liouville konstant sein.
Also sind $\mathbb{B}$ und $\mathbb{H}$ unter den gegebenen vier Kandidaten die einzigen zueinander äquivalenten Gebiete.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

10. Aufgabenblatt zum 27.6.2017

Aufgabe 10.1. a) Der Identitätssatz für Potenzreihen sagt, daß eine in $B_r(0)$ konvergente Potenzreihe genau dann konstant Null ist, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Zeigen Sie diese Aussage.

b) Zeigen Sie denselben Satz für eine im Kreisring $\mathcal{R}(r, R)$ konvergente Laurentreihe.

Lösung: (a) Sei $0 = f(z) = \sum_{n\geq k} c_n\, z^n$ für ein $k \geq 0$ mit $c_k \neq 0$. Dann ist $(k!) \cdot c_k = f^{(k)}(0) = 0$, und wir erhalten einen Widerspruch.

(b) Sei $0 = f(z) - g(z)$ in $\mathcal{R}(r, R)$ mit $r < R$, wobei f eine in $B_R(0)$ konvergente Potenzreihe in z und $h(w) := g(1/w)$ eine in $B_{1/r}(0)$ konvergente Potenzreihe in w ist. Damit gilt $f(z) = g(z)$ in $\mathcal{R}(r, R) = B_R(0) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0))$, und die einzelnen Funktionen f und g sind holomorph in $B_R(0)$, bzw. $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0)$. Sie verkleben sich daher zu einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen (also ganzen) Funktion

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in B_R(0) \\ g(z) & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0) \end{cases}$$

Außerdem ist $\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{w\to 0} h(w) = h(0)$, d.h. F ist auch noch beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist F damit konstant.

Aufgabe 10.2. Die rationale Funktion $f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ist holomorph in den Kreisringen (a) $\mathcal{R}(0, 1)$, (b) $\mathcal{R}(1, 2)$ und (c) $\mathcal{R}(2, \infty)$ um $0 \in \mathbb{C}$. Entwickeln Sie f in diesen drei Kreisringen als Laurentreihe um 0.

Lösung: In $B_1(0)$ gilt $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$. Dagegen ist in $(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0))$ die Gleichung $\frac{1}{1-z} = -\sum_{n\leq -1} z^n$ gültig.
Analog ist $\frac{1}{2-z} = \sum_{n\geq 0} z^n/2^{n+1}$ in $B_2(0)$ und $\frac{1}{2-z} = -\sum_{n\leq -1} z^n/2^{n+1}$ in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_2(0)$. Damit ist mittels Partialbruchzerlegung alles klar – man kann es aber auch umständlicher direkt (und dann schnell falsch) machen:

(a) In $\mathcal{R}(0, 1)$ gilt $f(z) = \big(\sum_{n\geq 0} z^n\big) \cdot \big(\sum_{n\geq 0} z^n/2^{n+1}\big) = \sum_{N\geq 0} \big(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}}\big) z^N$.
(b) In $\mathcal{R}(1, 2)$ müssen Potenzreihen in z und $1/z$ miteinander multipliziert werden. Aber im Kreisring haben wir absolute Konvergenz, also sind beliebige Umordnungen möglich. Wir erhalten
$f(z) = -\big(\sum_{n\leq -1} z^n\big) \cdot \big(\sum_{n\geq 0} z^n/2^{n+1}\big) = -\sum_{N\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{n=\max\{0,N+1\}}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\big) z^N$.
(c) In $\mathcal{R}(2, \infty)$ ist der Fall wieder einfach – analog zu (a) gilt
$f(z) = \big(\sum_{n\leq -1} z^n\big) \cdot \big(\sum_{n\leq -1} z^n/2^{n+1}\big) = \sum_{N\leq -2} \big(\sum_{n=-1}^{N-1} \frac{1}{2^{n+1}}\big) z^N$.
Schließlich können wir die Koeffizienten noch explizit berechnen:

(a) Für $N \geq 0$ ist $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}$.

(b) Für $N < 0$ ergibt sich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$ und für $N \geq 0$ ist $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} =$

$1 - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^{N+3}}$. (Hier habe ich mich verrechnet - Anna-Lena sagt, das richtige Ergebnis wäre $a_N = -1$ für $N < 0$ und $a_N = -1/2^{N+1}$ sonst.)

(c) Hier ist $N \leq -2$. Dann gilt $\sum_{n=-1}^{N-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{m=0}^{(-N)} 2^m = 2^{(-N)+1} - 1$. (Das muß auch korrigiert werden: $a_N = 2^{-N-1} - 1$ für $N < -1$.)

Aufgabe 10.3. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen, so daß $U \cap V \neq \emptyset$ zusammenhängend ist. Wählt man einen Basispunkt $* \in U \cap V$ (und setzt dann $\pi_1(X) := \pi_1(X, *)$), so erhalten wir natürliche Gruppenhomomorphismen $\pi_1(U) \to \pi_1(U \cup V)$ und $\pi_1(V) \to \pi_1(U \cup V)$.

a) Sind diese Abbildungen (immer) injektiv? (Beweis/Gegenbeispiel)

b) Zeigen Sie, daß die Vereinigung der Bilder von $\pi_1(U)$ und $\pi_1(V)$ in $\pi_1(U \cup V)$ diese Gruppe erzeugt. D.h. zeigen Sie, daß sich (bis auf Homotopie) jeder geschlossene Weg $* \rightsquigarrow *$ in $U \cup V$ aus geschlossenen Wegen $* \rightsquigarrow *$ zusammensetzen läßt, die vollständig in U oder vollständig in V liegen.

c) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu (b), falls $U \cap V$ nicht zusammenhängend ist.

Lösung: (a) Sei $U = \mathbb{C}^*$ und $V = \mathbb{C}$. Dann ist $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$, aber $\pi_1(U \cup V) = 0$.

(b) Sei $\gamma : [0, 1] \to U \cup V$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = *$. Dann gibt es (wegen Lemma 30) eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so daß $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$ oder $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V$. O.B.d.A. können wir sogar voraussetzen, daß sich diese zwei Eigenschaften stets abwechseln (sonst lege man zwei Abschnitte zusammen). Daraus folgt $\gamma(t_i) \in U \cap V$ für alle i, und wir wählen Wege $\delta_i : * \rightsquigarrow \gamma(t_i)$ innerhalb von $U \cap V$ (ist zusammenhängend) – dabei seinen δ_0 und δ_n die konstanten Wege $*$. Damit können wir γ schreiben als $\gamma = *_{i=0}^{n}(\delta_i * \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} * \delta_{i+1}^{-1})$.

(c) Bezeichne $\mathcal{R}(2, 3)$ den Kreisring mit den Radien 2 und 3 um $0 \in \mathbb{C}$. Dann setzen wir $U = \{z \in \mathcal{R}(2, 3) \mid \operatorname{Im}(z) > -1\}$ und $V = \{z \in \mathcal{R}(2, 3) \mid \operatorname{Im}(z)i < 1\}$. Es ergibt sich $U \cup V = \mathcal{R}(2, 3)$ (mit der Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$), aber U und V sind beide kontrahierbar (homotopieäquivalent zum Punkt), also gilt $\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0$.

Wenn man das Kontrahierbarkeitsargument umgehen möchte, dann zerlegt man alternativ U (und V) jeweils in sternförmige Gebiete, so daß man dann (b) mehrmals anwenden kann.

Aufgabe 10.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $* \in U$ ein Basispunkt. Man zeige, daß dann jeder (stetige) geschlossene Weg $\gamma : * \rightsquigarrow *$ in U zu einem stückweise glatten Weg $\delta : * \rightsquigarrow *$ in U homotop ist. (Man kann δ sogar als Streckenzug wählen.)

Lösung: Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von U durch konvexe Mengen (z.B. durch offene Kreisscheiben). Dann gibt es (wegen Lemma 30) eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so daß $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{\alpha(i)}$. Sei nun $\delta : [0, 1] \to U$ der Weg, der auf $[t_i, t_{i+1}]$ die Strecke von $ia_i := \gamma(t_i)$ nach $a_{i+1} := \gamma(t_{i+1})$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß $\gamma \sim \delta$ gilt:

Dazu setzen wir $H : [0, 1] \times [0, 1] \to U$ zusammen aus speziellen $H_i : [t_i, t_{i+1}] \times [0, 1] \to U_{\alpha(i)}$ mit $H_i(t_i, \bullet) = a_i$ und $H_i(t_{i+1}, \bullet) = a_{i+1}$. Bezeichnen dazu $\gamma_i, \delta_i : [t_i, t_{i+1}] \to U_{\alpha(i)}$ die i-ten Wegabschnitte von γ und δ (beide führen von a_i nach a_{i+1}), so ist

$\delta_i * \gamma_i^{-1}$ ein geschlossener Weg $a_i \rightsquigarrow a_{i+1} \rightsquigarrow a_i$ innerhalb von $U_{\alpha(i)}$; bezeichne dann h_i eine Homotopie $\delta_i * \gamma_i^{-1} \sim c_{a_i}$ ($c_\bullet$ sei der konstanten Weg). Wir können h_i trivial fortsetzen zu einer Homotopie "$h_i * \gamma_i$" zwischen $\delta_i * \gamma_i^{-1} * \gamma_i$ und $c_{a_i} * \gamma_i$ (von a_i nach a_{i+1}).

Andererseits gibt es eine Homotopie ℓ_i von $\gamma_i^{-1} * \gamma_i \sim c_{a_{i+1}}$. Diese kann nun von links trivial zu einer Homotopie "$\delta_i * \ell_i$" von $\delta_i * \gamma_i^{-1} * \gamma_i \sim \delta_i * c_{a_{i+1}}$ fortgesetzt werden. Wir konstruieren nun H_i als die Zusammensetzung von $h_i * \gamma_i$ und $\delta_i * \ell_i$ – das gibt dann eine Homotopie zwischen $c_{a_i} * \gamma_i$ und $\delta_i * c_{a_{i+1}}$. Eine anschließende Umparametrisierung (das sind auch Homotopien) ergibt die gesuchte Homotopie $\gamma_i \sim \delta_i$.

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

11. Aufgabenblatt zum 4.7.2017

Aufgabe 11.1. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve; speziell sei $c_1^R : [0,1] \to \mathbb{C}$, $c_1^R(t) := R \cdot \exp(2\pi i t)$ die Kurve entlang des Randes $\partial B_R(0)$.

a) Wir definieren $\operatorname{out}(\gamma) := \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1]) \mid \operatorname{ind}(\gamma, a) = 0\}$ und $\operatorname{ins}(\gamma) := \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1]) \mid \operatorname{ind}(\gamma, a) \neq 0\}$. Bestimmen Sie $\operatorname{out}(c_1^R)$ und $\operatorname{ins}(c_1^R)$.

b) Sei $\gamma([0,1]) \subseteq B_R(0)$. Zeigen Sie, daß daraus $\operatorname{out}(c_1^R) \subseteq \operatorname{out}(\gamma)$ folgt und daß $\operatorname{ins}(\gamma)$ beschränkt ist.

c) Geben Sie ein Beispiel einer geschlossenen Kurve γ, so daß $\operatorname{out}(\gamma)$ nicht zusammenhängend ist.

Lösung: (a) Falls $a \in B_R(0)$, so gilt $\int_{\partial B_R(0)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$, d.h. $a \in \operatorname{ins}(c_1^R)$. Falls $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$, so ist $\frac{1}{z-a}$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{B}_R(0)$, und es folgt $\int_{\partial B_R(0)} \frac{dz}{z-a} = 0$, d.h. $a \in \operatorname{out}(c_1^R)$.

(b) Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$ und $\gamma([0,1]) \subseteq B_R(0)$. Dann betrachten wir die geschlossenen Wege $\gamma_s(t) := s \cdot \gamma(t)$ für $s \in [0,1]$. Alle Wege liegen innerhalb von $B_R(0)$, d.h. die Integrale $\int_{\gamma_s} \frac{dz}{z-a}$ sind wohldefiniert und stetig in s. Da sie aber (bis auf den Faktor $2\pi i$) ganzzahlig sind, sind die Integrale sogar konstant in s. Nun ergibt sich aber für $s = 1$ das gesuchte $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \cdot \operatorname{ind}(\gamma, a)$ und für $s = 0$ das Integral über den konstanten Weg, also 0.
Umgekehrt folgt daraus, daß $\operatorname{ins}(\gamma) \subseteq \operatorname{ins}(c_1^R) = B_R(0)$, d.h. $\operatorname{ins}(\gamma)$ ist beschränkt.

(c) Sei γ die Verknüpfung aus c_1 und c_{-1} (ohne anschliessende Homotopie zum konstanten Weg). Hier gilt $\gamma([0,1]) = \partial B_1(0)$, und alle anderen Punkte sind äußere Punkte. Die Menge $\operatorname{ins}(\gamma) = \emptyset$ ist leer, und $\operatorname{out}(\gamma)$ zerfällt in zwei Komponenten.

Aufgabe 11.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $0 \in U$, und sei $f : U^* \to \mathbb{C}$ holomorph (mit einer Singularität in 0). Zeigen Sie, daß $\operatorname{res}(f', 0) = 0$ gilt.

Lösung: Sei $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n$ die Laurent-Entwicklung von f um 0. Da der positive und negative Teil dieser Reihe beides Potenzreihen sind (in z, bzw. in $w = 1/z$), ist in beiden Fällen die Summation mit der Ableitung vertauschbar. Also gilt $f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot c_n \cdot z^{n-1}$. Und hier sieht man, daß der Koeffizient vor z^{-1} (also $n = 0$) verschwindet.

Aufgabe 11.3. a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $0 \in U$. Habe $f : U^* \to \mathbb{C}$ in 0 einen k-fachen Pol. Dann kann man $h(z) := z^k \cdot f(z)$ holomorph nach U fortsetzen. Beweisen Sie, daß dann $\operatorname{res}(f, 0) = h^{(k-1)}(0)/(k-1)!$ gilt.

b) Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und habe g in 0 eine einfache Nullstelle. Beweisen Sie, daß dann $\operatorname{res}(f/g,\, 0) = f(0)/g'(0)$ gilt.

c) Berechnen Sie $\operatorname{res}(\exp(iz)/(z^2+1), a)$ für alle Punkte $a \in \mathbb{H}$ der oberen Halbebene.

d) Berechnen Sie $\mathrm{res}(\pi \cdot \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, k)$ für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$.

Lösung: (a) Sei $f(z) = \sum_{ni \geq -k} c_n \cdot z^n$ die Laurentreihenentwicklung von f. Dann ist $h(z) = z^k \cdot f(z) = \sum_{ni \geq -k} c_n \cdot z^{n+k}$, und für die Ableitung folgt

$$h^{(k-1)}(z) = \sum_{n \geq -k} (n+k)(n+k-1) \cdot \ldots \cdot (n+2) \cdot c_n \cdot z^{n+1},$$

also $h^{(k-1)}(0) = (k-1)! \cdot c_{-1}$.

(b) Sei $g(z) = z \cdot h(z)$ – dann gilt $g'(0) = h(0)$. Andererseits folgt aus (a): $\mathrm{res}(f/g, 0) = (zf/g)(0) = (f/h)(0) = f(0)/h(0)$.

(c) Die Funktion $f(z) := \exp(iz)/(z^2+1)$ ist in $\mathbb{H} \setminus \{i\}$ holomorph, also ist das Residuum in allen diesen Punkten Null. Und in $a = i$ gilt wegen (b) $\mathrm{res}(\exp(iz)/(z^2+1), i) = \exp(-1)/(2i) = 1/(2ei)$.

(d) Wir benutzen wieder (b): Wegen $(\sin \pi z)' = \pi \cdot \cos \pi z$ folgt $\mathrm{res}(\pi \cdot \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, k) = (\pi \cdot \cos \pi k)/(\pi \cdot \cos \pi k) = 1$.

Aufgabe 11.4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{\partial B_5(0)} \frac{z^3}{z^4-1}\, dz$, b) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{(z-3)(z^{13}-1)}$, c) $\int_{\partial B_1(0)} \frac{8z^3-5}{2z^4-5z+2}\, dz$.

Lösung: In (a) und (c) benutzen wir, daß diese Integrale Nullstellen zählen:

(a) $\int_{\partial B_5(0)} \frac{z^3}{z^4-1}\, dz = \frac{1}{4} \cdot 2\pi i \cdot \#\{\text{Nullstellen von } z^4 - 1 \text{ im Kreis } B_5(0)\} = 2\pi i$.

(c) Hier benötigen wir die Anzahl der Nullstellen von $h(z) := 2z^4 - 5z + 2$ im Einheitskreis. Wir benutzen den Satz von Rouché mit $f(z) := -5z$ und $g(z) := 2z^4 + 2$. Auf $\partial B_1(0)$ gilt $|z| = 1$, also $|f(z)| = 5 > 4 \geq |g(z)|$. Die Nullstellenanzahl von $h = f + g$ in $B_1(0)$ ist also gleichder von f, d.h. gleich 1. Insgesamt bedeutet das $\int_{\partial B_1(0)} \frac{8z^3-5}{2z^4-5z+2}\, dz = 2\pi i$.

(b) Wir integrieren um $z = 0$ (Radius 2, indem wir diesen Kreis als den Kreis mit Radius $1/2$ um ∞ auffassen. Hier ist die Koordinate $w/1/z$, die dann in ∞ den Wert 0 annimmt: $\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{(z-3)(z^{13}-1)} = \int_{-\partial B_{1/2}(\infty)} \frac{d(1/w)}{(1/w-3)(1/w^{13}-1)} = \int_{\partial B_{1/2}(\infty)} \frac{w^{12}\, dw}{(1-3w)(1-w^{13})}$. Die Funktion $f(w) := \frac{w^{12}\, dw}{(1-3w)(1-w^{13})}$ hat innerhalb von $B_{1/2}(w=0)$ nur einen einfachen Pol in $w = 1/3$. Nach Aufgabe 11.3 ergibt sich dann $\mathrm{res}(f, 1/3) = \frac{(1/3)^{12}}{(-3) \cdot (1-(1/3)^{13})} = \frac{1}{-3^{13}+1}$. Insgesamt erhalten wir also $\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{(z-3)(z^{13}-1)} = \frac{2\pi i}{1-3^{13}}$.
(Interessant wäre es zu sehen, ob auch die direkte Zählung der 13 Residuen im Innern des Kreises zum Erfolg führt.)

Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Anna-Lena Winz
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75426
anelanna@math.fu-berlin.de

VL "Funktionentheorie"
FU Berlin, Sommer 2017

12. Aufgabenblatt zum 11.7.2017

Aufgabe 12.1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man zeige, daß G genau dann einfach zusammenhängend (alle geschlossenen Wege sind nullhomotop) ist, wenn alle Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to G$ mit $\alpha(0) = \beta(0)$ und $\alpha(1) = \beta(1)$ zueinander homotop sind.

Lösung: Die Richtung ($\Leftarrow$) ist klar. Sei umgekehrt G einfach zusammenhängend, und seien $\alpha, \beta : [0,1] \to G$ Wege mit $a := \alpha(0) = \beta(0)$ und $b := \alpha(1) = \beta(1)$. Bezeichnen c_a und c_b die konstanten Wege auf a und b, dann gibt es zunächst eine Homotopie $H : \alpha * \beta^{-1} \sim c_a$. Damit sind homotop: $\beta \sim c_a * \beta \overset{H*\beta}{\sim} (\alpha * \beta^{-1}) * \beta = \alpha * (\beta^{-1} * \beta) \sim \alpha * c_b \sim \alpha$.

Aufgabe 12.2. Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) > 0,\ \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$.

a) Skizzieren Sie U.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ eine biholomorphe Abbildung $U \xrightarrow{\sim} V$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$ induziert.

c) Beschreiben Sie V.

Lösung: (b) $f : U \to \mathbb{C}$ ist offen und injektiv (denn U liegt im ersten Quadranten, d.h. $\arg(z) \in (0, \frac{\pi}{2})$).

(c) Die Ungleichung $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1$ übersetzt sich in $\frac{z^2 - \overline{z}^2}{4i} = \frac{z+\overline{z}}{2} \cdot \frac{z-\overline{z}}{2i} > 1$, also $2\operatorname{Im}(w) = w - \overline{w} > 4i$ für $w = z^2$. Der Bildbereich ist also $V = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 2\}$. Die Ungleichungen $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) > 0$ spielen keine Rolle – denn aus der Ungleichung $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1$ folgt diese (oder das Gegenteil $\ldots < -1$) automatisch. Und das beschreibt einerseits U, bzw. $-U$.

Aufgabe 12.3. a) Sind die Gebiete $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$ homömorph zueinander?

b) Gibt es eine biholomorphe Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$?

Lösung: (a) Es gibt einen Homöomorphismus $\varphi : (0, \infty) \xrightarrow{\sim} (1, \infty)$. Läst man diesen rotieren, so entsteht $\Phi : \mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$.

(b) Sei $\iota : \mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0) \xrightarrow{\sim} B_1(0)$, $\iota(z) := \frac{1}{z}$. Damit würde aus der Existenz von Φ eine biholomorphe Abbildung $\Psi := \iota \circ \Phi : \mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} B_1(0)$ entstehen. Aus der Beschränktheit von Ψ folgt, daß sich Ψ zu einem holomorphen (und immernoch beschränkten) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortsetzen läßt. Diese Abbildung muß dann aber nach dem Satz von Liouville konstant sein.

Aufgabe 12.4. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$. Man zeige, daß $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ genau dann linear abhängig über $\mathbb{R}$ ist, wenn $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung: Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^*$ gilt $a\omega_1 + b\omega_2 = 0 \Leftrightarrow \omega_1/\omega_2 = -b/a$.

Das war die letzte Serie – ich wünsche Ihnen viel Erfolg beim Lösen dieser Aufgaben, bei der Wiederholung der Vorlesungen und natürlich bei den beiden Klausuren (Mi, 19.7.17 im A6/031 + Ausweichraum A14/HS-B und Mi, 27.9.17 im A3/HS001, jeweils 12-2). Jeder darf beide Klausuren mitschreiben – das bessere Ergebnis zählt.

1. Abschluss-Klausur Funktionentheorie (19.7.2017)

Aufgabe 1.1. a) Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma_r} \overline{z}\, dz$ in Abhängigkeit von $r > 0$, wobei γ_r der geschlossene Weg ist, der $1 \in \mathbb{C}$ entlang des Randes $\partial B_r(1)$ im Abstand r umrundet.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} \exp(\exp(z) + z^3 - 1)\, dz$.

Lösung: (a) $\gamma_r(t) = 1 + r\ \exp(2\pi i t)$, also ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} \overline{z}\, dz &= \int_0^1 \overline{(1 + r\ \exp(2\pi i t))} \cdot 2\pi i r \exp(2\pi i t)\, dt \\
&= 2\pi i r \cdot \int_0^1 (1 + r\ \exp(-2\pi i t))\ \exp(2\pi i t)\, dt \\
&= 2\pi i r \cdot \int_0^1 (\exp(2\pi i t) + r))\, dt \\
&= 2\pi i r \cdot \left([\tfrac{1}{2\pi i} \exp(2\pi i t)]_0^1 + [rt]_0^1\right) = 2\pi i r^2.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:
$\int_{\gamma_r} \overline{z}\, dz = \int_{\partial B_r(0)} (1 + \overline{z})\, dz = \int_{\partial B_r(0)} \overline{z}\, dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{r^2}{z}\, dz = 2\pi i r^2.$

(b) Der Integrand ist holomorph in $\mathbb{C}$, also ist das Integral gleich 0.

Aufgabe 1.2. Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. f habe eine Singularität in 0. Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{C}$ hat $g(z) := f(z) - \lambda/z$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$?

Lösung: Genau für $\lambda = \operatorname{res}(f, 0)$, denn genau für dieses λ verschwindet das Integral $\int_{\partial B_1(0)} g(z)\, dz$.

Aufgabe 1.3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so daß es für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = g(z)^2$ (also $g = \sqrt{f}$) gibt. Folgt daraus dann auch die Existenz einer holomorphen Funktion $h : G \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = h(z)^3$ (also $h = \sqrt[3]{f}$)?

Lösung: Die Voraussetzung sagt, daß G ein spezielles Gebiet ist, und daraus folgt, daß es ein Elementargebiet ist. Für dieses existiert aber dann auch $\log(f)$ und damit auch alle Wurzeln.

Aufgabe 1.4. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $2z^4 - 5z + 2 = 0$ (a) innerhalb von $B_1(0)$, (b) auf dem Rand $\partial B_1(0)$ und (c) in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$. Sind Mehrfachnullstellen darunter?

Lösung: Auf $\partial B_1(0)$ gilt $|5z| = 5$ und $|2z^4 + 2| \leq 4$. Damit kann $5z - (2z^4 + 2)$ dort keine Nullstelle haben. Nach dem Satz von Rouché ist dann $\#\{\text{Nullstellen von } 5z - (2z^4 + 2) \text{ in } B_1(0)\} = \#\{\text{Nullstellen von } 5z \text{ in } B_1(0)\} = 1$. Damit liegen genau drei Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$.
Mehrfachnullstellen $\alpha \in \mathbb{C}$ von $f(z)$ implizieren $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Hier wäre also $8\alpha^3 = 5$, d.h. $8\alpha^4 = 5\alpha$, und wir können das in $4 \cdot (2\alpha^4 - 5\alpha + 2) = 0$ einsetzen. Das ergibt $5\alpha - 20\alpha + 8 = 0$, also $\alpha = 8/15$. Das erfüllt aber nicht die Gleichung $8\alpha^3 = 5$ (sonst wäre $8^4 = 3^3 \cdot 5^4$).
Alternativ kann man argumentieren, daß $\alpha = \sqrt[3]{5/8} \in B_1(0)$ ist, aber daß es in diesem Bereich sowieso nur eine Nullstelle gibt.

Aufgabe 1.5. a) Berechnen Sie $\operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)-1}, p)$ für alle Polstellen $p \in \mathbb{C}$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)+1}, q)$ für alle Polstellen $q \in \mathbb{C}$.

Lösung: (a) Die Polstellen sind $p_k = 2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da die Funktion $\frac{1}{\exp(z)-1}$ 2π-periodisch ist, genügt es, das Residuum in 0 auszurechnen. Hier gilt $\frac{1}{\exp(z)-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\sum_{n\geq 0} z^n/(n+1)!}$. Der zweite Faktor ist eine in 0 holomorphe Funktion $h(z)$ mit $h(0) = 1$. Deshalb ist $\operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)-1}, 2k\pi i) = \operatorname{res}(\frac{1}{\exp(z)-1}, 0) = 1$.

(b) Die Polstellen sind $q_k = (2k+1)\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Der Grenzwert der Funktion $g_k(z) := \frac{z-q_k}{\exp(z)+1}$ für $z \to q_k$ kann mit der Regel von l'Hospital ausgerechnet werden: $\Rightarrow \lim_{z\to q_k} \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{\exp(q_k)} = -1$.
Ein alternativer Zugang zu (b) ist der folgende: $\Phi_k : z \mapsto z + (2k+1)\pi i$ ist biholomorph, es gilt $\Phi_k(0) = q_k$, und für die Funktion $f(z) := \frac{1}{\exp(z)+1}$ folgt $(f \circ \Phi)(z) = \frac{-1}{\exp(z)-1}$. Damit gilt $\operatorname{res}(f, q_k) = \operatorname{res}(f, \Phi_k(0)) = \operatorname{res}(f \circ \Phi_k, 0) = -1$ wegen (a).
Ein alternativer und recht cooler Zugang zu (a+b) ist die Berechnung der Residuen, ohne die Polstellen zu identifizieren: Für $f(z) = h(z)/g(z)$, so daß g eine einfache Nullstelle in p hat und beide g, h holomorph sind, gilt $\operatorname{res}(f, p) = h(p)/g'(p)$. In (a+b) sei $h(z) = 1$ und $g(z) = \exp(z) \pm 1$, und man erhält $h(z)/g'(z) = 1/\exp(z)$. Wenn z eine Polstelle ist, so muß aber $g(z) = 0$ gelten, d.h. $\exp(z) = \mp 1$.

Aufgabe 1.6. a) Man entscheide, ob es eine in $\mathbb{B} := B_1(0)$ holomorphe Abbildung f gibt mit $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ (Beweis/Beispiel).

b) Man entscheide, ob es eine in $\mathbb{B} := B_1(0)$ holomorphe Abbildung g gibt mit $g^{(n)}(0) = n!/n^2$ (Beweis/Beispiel).

Lösung: Wenn $h : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann muß $h(z) = \sum_{n\geq 0} h^{(n)}(0)/n! \cdot z^n$ eine in $\mathbb{B}$ konvergente Potenzreihe sein, d.h. der Konvergenzradius muß mindestens 1 sein.

(a) Aus $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ folgt dann also $f(z) = \sum_{n\geq 0} n! \cdot z^n$, aber diese Potenzreihe hat Konvergenzradius 0. Es gibt dieses f also nicht.

(b) Aus $g^{(n)}(0) = n!/n^2$ folgt $g(z) = \sum_{n\geq 0} 1/n^2 z^n$, und diese Potenzreihe hat Konvergenzradius 1 (wie $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$) – man erhält das entweder über ein Argument über die zweite Ableitung von $\frac{1}{1-z}$, oder über $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$. Diese Reihe definiert also wirklich eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 1.7. Mit $f(z) := \sin(\frac{1}{z})$ erhalten wir eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$. Untersuchen Sie, ob die Singularität in 0 hebbar, ein Pol oder eine wesentliche Singularität ist. Geben Sie dafür wenigstens *zwei* voneinander wesentlich verschiedene Begründungen.

Lösung: Methode 1: Wir berechnen die Laurentreihe von f. Die Reihe für sin ist $\sin(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, und daraus folgt $f(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n 1/(2n+1)! \cdot z^{-(2n+1)}$. Die Laurentreihe bricht also nicht ab, d.h. die Singularität ist wesentlich.

Methode 2: Wegen $f(1/\pi k) = 0$ und $f(1/(\pi k + \pi/2)) = 1$ existiert $\lim_{z \to 0} f(z)$ nicht (er ist auch nicht ∞). Deshalb ist die Singularität wesentlich.

2. Nachklausur Funktionentheorie (27.9.2017)

Aufgabe 2.1. Sei $f(z) := \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$. Berechnen Sie die Integrale (a) $\int_\gamma f(z)\,dz$, (b) $\int_\gamma f'(z)\,dz$ und (c) $\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz$, wobei γ den geschlossenen Weg entlang $\partial B_2(0)$ bezeichnet.

Lösung: (a) $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{res}(f,i) + \mathrm{res}(f,-i) = 1+1 = 2$.
(b) f' hat in $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ eine Stammfunktion, also sind alle geschlossenen Integrale Null. (Alternativ kann man mit $\mathrm{res}(f',\bullet) = 0$ argumentieren.)
(c) $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(z)/f(z)\,dz = 1-2 = -1$, da dieses Integral die Null- und Polstellen von f zählt. Die Polstellen sind offensichtlich – und die Nullstellen sind es in $f(z) = \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{(z+i)(z-i)} = \frac{2z}{z^2+1}$ dann auch.

Mit dieser Darstellung von f sieht man, dass das Integral in (a) auch Nullstellen zählt. Und zwar die von z^2+1.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie, daß es keine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $|f| \geq 3$ und $f(-1) = -5$ und $f(1) = 5$.

Lösung: Dann wäre $1/f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch ganz, und wegen $|1/f| \leq 3$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville wäre dann $1/f$, also auch f konstant.
Alternativ würde ein nicht-konstantes f der Tatsache widersprechen, daß das Bild ganzer Funktionen dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2.3. Wieviele Lösungen hat die Gleichung $z^5+iz^3-4z+i = 0$ im Kreisring $\mathcal{R}(1,2) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?

Lösung: Bezeichne $f(z) := z^5 + iz^3 - 4z + i$. Wir untersuchen zunächst $B_1(0)$:
Falls $|z| = 1$, so ist $|z^5 + iz^3 + i| \leq 3 < 4 = |4z|$. Aus dem Satz von Rouché folgt also, daß $\#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } B_1(0)\} = \#\{\text{Nullstellen von } 4z \text{ in } B_1(0)\} = 1$.
Analog folgt für $|z| = 2$ die Ungleichung $|z^5| = 32 > 17 = 8+8+1 \geq |iz^3 - 4z + i|$. Daraus ergibt sich nach Rouché $\#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } B_2(0)\} = \#\{\text{Nullstellen von } z^5 \text{ in } B_2(0)\} = 5$.
Auf den Rändern gibt es (wegen der obigen Ungleichungen) auch keine Nullstellen. Für den Kreisring $\mathcal{R}(1,2)$ ergibt sich damit die Differenz $5-1 = 4$ als die gesuchte Anzahl.

Aufgabe 2.4. Berechnen Sie $\mathrm{res}(\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}, p)$ für alle Polstellen $p \in \mathbb{C}$ und zeigen Sie, daß diese Residuen reell sind.

Lösung: Sei $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$. Für den einfachen Pol $p = i$ erhalten wir $\mathrm{res}(f,i)$ durch Einsetzen von i in $(z-i)\cdot f$ (nach Beheben der Singularität), also $\mathrm{res}(f,i) = \frac{1}{(i+i)(i-1)^2} = \frac{1}{4}$. Analog erhalten wir $\mathrm{res}(f,-i) = \frac{1}{(-i-i)(-i-1)^2} = \frac{1}{4}$.
Für den zweifachen Pol $p = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten:
(a) Mit $g(z) := (z-1)^2 \cdot f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ergibt sich $\mathrm{res}(f,1) = g'(1) = \frac{-2z}{(z^2+1)^2}(1) = -\frac{1}{2}$.
(b) Wir benutzen den Residuensatz und berechnen für $r \gg 0$ das Integral

$$\int_{\partial B_r(0)} f(z)\,dz = \int_{\partial B_{1/r}(\infty)} f(1/w)\,d(1/w) = \int_{\partial B_{1/r}(\infty)} \frac{-w^2\,dw}{(1+w^2)(1-w)^2} = 0.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit daraus, daß der Integrand in ∞ (also für $w = 0$) holomorph ist – und wir den Kreis (mit $r \gg 0$) hinreichend klein machen können.

Aufgabe 2.5. Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(g(z)) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß dann f oder g konstant sein müssen.

Lösung: Wenn g nicht konstant ist, dann ist g eine offene Abbildung (Satz von der Gebietstreue). Dann enthält $g(\mathbb{C})$ also eine nichtleere, offene Menge U, und es folgt $f|_U \equiv 0$. Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt dann aber $f \equiv 0$, d.h. f ist konstant.

Aufgabe 2.6. Sei $f(z) := \exp(\frac{1}{z})/z^2$; diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}^*$. Untersuchen Sie, ob $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für alle geschlossenen Kurven $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ gilt.

Lösung: Methode 1: Wir berechnen die Laurentreihe von f. Die Reihe für exp ist $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} z^n/n!$, also ist $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-n-2}/n! = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots$. Damit sehen wir, daß $\operatorname{res}(f, 0) = 0$ ist.

Methode 2: Die Funktion $-f$ besitzt mit $\exp(1/z)$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$.

Aufgabe 2.7. a) Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\wp$ die zugehörige Weierstrasssche $\wp$-Funktion. Man zeige, daß $\wp$ keine Periode $c \in \mathbb{C} \setminus L$ besitzt.

b) Geben Sie eine L-periodische meromorphe Funktion an, die genau drei verschiedene (einfache) Polstellen in $\mathbb{C}/L$ hat.

Lösung: (a) Falls c eine Periode von $\wp$ ist, dann muß mit 0 auch c eine Polstelle von $\wp$ sein. Das widerspricht aber der Tatsache, daß alle Polstellen von $\wp$ in L liegen.

(b) $f(z) := 1/\wp'(z)$ erfüllt das, da die Nullstellen von $\wp'$ die drei Punkte aus $\frac{1}{2}L \setminus L$ sind.