

3. AUFGABENBLATT ZUM 10.5.24

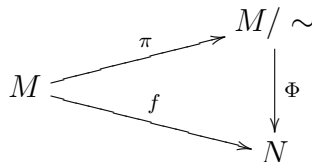
Aufgabe 9. Benutzen Sie die Idee der RUSSELLSchen Antinomie, um zu zeigen, daß eine Menge M *nie* gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge 2^M sein kann. D.h. führen Sie die Existenz einer bijektiven (oder sogar nur *surjektiven*) Abbildung $\varphi : M \rightarrow 2^M$ zum Widerspruch. (Gibt es *injektive* Abbildungen $M \hookrightarrow 2^M$?)

Aufgabe 10. Sei M eine Menge, \sim eine Äquivalenzrelation auf M und $\pi : M \rightarrow M/\sim$ die zugehörige Surjektion auf den Quotienten, d.h. auf die Menge aller Äquivalenzklassen.

a) Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in M$ mit $a \sim b$ gilt. Zeigen Sie, daß es dann genau eine (!) Abbildung

$$\Phi : M/\sim \rightarrow N$$

gibt mit $\Phi \circ \pi = f$. Für diese Gleichheit sagen wir, daß das Diagramm



kommutiert.

b) Zeigen Sie, daß Φ genau dann injektiv ist, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

c) Zeigen Sie, daß Φ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

d) Für Mengen A, B bezeichne $\text{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B . Wir erhalten damit für jede Menge N eine “natürliche”/“kanonische” Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Abb}(M/\sim, N) & \longrightarrow & \{f \in \text{Abb}(M, N) \mid f(a) = f(b) \text{ für } a \sim b\} \\
 \Phi & \longmapsto & \Phi \circ \pi.
 \end{array}$$

Zeigen Sie, daß diese Abbildung bijektiv ist.

Aufgabe 11. a) Definieren Sie auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Produkt (und überprüfen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Definition), so daß für die kanonische Abbildung $\pi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Gleichung

$$\pi(a) \cdot \pi(b) = \pi(ab)$$

gilt.

b) Gibt es für diese Produktdefinition mehrere Möglichkeiten, oder ist sie eindeutig? Ist Ihr Produkt auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ assoziativ, kommutativ? Erfüllt es das Distributivgesetz mit der Addition?

Aufgabe 12. a) Bezeichne \bar{a} (oder $[a]$) die Restklasse von a in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Welche der Gleichungen $\bar{6} \cdot x = \bar{5}$ oder $\bar{6} \cdot y = \bar{4}$ oder $\bar{5} \cdot z = \bar{1}$ sind in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ lösbar? Und falls eine der Gleichungen lösbar ist – sind die Lösungen in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ eindeutig?

b) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$. Nutzen Sie Aufgabe 2, um die Kongruenz $ax \equiv 1 \pmod{n}$ in \mathbb{Z} , bzw. die Gleichung $\bar{a} \cdot x = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zu lösen.

Gemeint ist: Zeigen Sie, daß diese Gleichung eine eindeutige Lösung hat. Wir bezeichnen die eindeutige Lösung x dann als $1/\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) Berechnen Sie $1/\bar{9}$ in $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$.