Klaus Altmann
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
Tel.: (030) 838 - 75428
altmann@math.fu-berlin.de

Willem van Zuijlen
WIAS
vanzuijlen@wias-berlin.de

"Lineare Algebra I "
FUB, Sommer 2024
Tutoren: Laura Weyers,
Christopher Huggle

3. Aufgabenblatt zum 10.5.24

Aufgabe 9. Benutzen Sie die Idee der Russellschen Antinomie, um zu zeigen, daß eine Menge M *nie* gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge 2^M sein kann. D.h. führen Sie die Existenz einer bijektiven (oder sogar nur *surjektiven*) Abbildung $\varphi : M \twoheadrightarrow 2^M$ zum Widerspruch. (Gibt es *injektive* Abbildungen $M \hookrightarrow 2^M$?)

Aufgabe 10. Sei M eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $\pi : M \twoheadrightarrow M/\sim$ die zugehörige Surjektion auf den Quotienten, d.h. auf die Menge aller Äquivalenzklassen.

a) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in M$ mit $a \sim b$ gilt. Zeigen Sie, daß es dann genau eine (!) Abbildung

$$\Phi : M/\sim \;\longrightarrow N$$

gibt mit $\Phi \circ \pi = f$. Für diese Gleichheit sagen wir, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M/\sim \arrow[d, "\Phi"] \\ M \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert.

b) Zeigen Sie, daß Φ genau dann injektiv ist, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

c) Zeigen Sie, daß Φ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

d) Für Mengen A, B bezeichne $\mathrm{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B. Wir erhalten damit für jede Menge N eine "natürliche"/"kanonische" Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Abb}(M/\sim, N) & \longrightarrow & \{f \in \mathrm{Abb}(M, N) \mid f(a) = f(b) \text{ für } a \sim b\} \\ \Phi & \mapsto & \Phi \circ \pi. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß diese Abbildung bijektiv ist.

Aufgabe 11. a) Definieren Sie auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Produkt (und überprüfen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Definition), so daß für die kanonische Abbildung $\pi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Gleichung

$$\pi(a) \cdot \pi(b) = \pi(ab)$$

gilt.

b) Gibt es für diese Produktdefinition mehrere Möglichkeiten, oder ist sie eindeutig? Ist Ihr Produkt auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ assoziativ, kommutativ? Erfüllt es das Distributivgesetz mit der Addition?

Aufgabe 12. a) Bezeichne $\overline{a}$ (oder $[a]$) die Restklasse von a in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Welche der Gleichungen $\overline{6} \cdot x = \overline{5}$ oder $\overline{6} \cdot y = \overline{4}$ oder $\overline{5} \cdot z = \overline{1}$ sind in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ lösbar? Und falls eine der Gleichungen lösbar ist – sind die Lösungen in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ eindeutig?

b) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Nutzen Sie Aufgabe 2, um die Kongruenz $ax \equiv 1 \pmod{n}$ in $\mathbb{Z}$, bzw. die Gleichung $\overline{a} \cdot x = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zu lösen.

Gemeint ist: Zeigen Sie, daß diese Gleichung eine eindeutige Lösung hat. Wir bezeichnen die eindeutige Lösung x dann als $1/\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) Berechnen Sie $1/\overline{9}$ in $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$.