Zwei verschiedene Formen von Geldanlagen

Klaus Altmann

Auf einem normalen Sparbuch gibt es jährlich Zinsen. Hat man dagegen ein Guthaben auf einer Kreditkarte (die Bayerische Vereinsbank, einer der Hauptsponsoren der alpha, bietet z.B. mit der HUK-Visa-Karte ausgezeichnete Konditionen), so werden die fälligen Zinsen monatlich überwiesen (aber dafür leider nur 1/12 des jährlichen Betrages). Beachtet man jedoch den Zinseszins, so erweist sich die monatliche Zinszahlung wirklich als Vorteil. Wie groß ist dieser Vorteil? Was ließe sich noch gewinnen, wenn man den Zins sogar wöchentlich, täglich oder sogar (fast) unendlich oft auszahlen würde? Würde man dann (fast) unendlich reich?

Voller Hoffnung wollen wir jetzt versuchen, diese Fragen zu beantworten. Als leichte Vorübung zur Zinsrechnung möchte ich zunächst mit der altbekannten Scherzfrage beginnen, was denn mehr sei: 60% von 80%, oder 80% von 60%? (Oder, falls man praktischere Fragestellungen bevorzugt: Ist es bei einem Sonderangebot günstiger, den eventuellen Preisrabatt *vor* oder *nach* Erhebung der Mehrwertsteuer zu gewähren?) Wem das völlig klar ist, der darf diesen Absatz getrost überspringen. Den übrigen Lesern möchte ich eindringlich klarmachen, daß das Symbol % nichts weiter bedeutet als eine andere Schreibweise der Zahl 1/100. Dementsprechend bedeuten $s\%$ einer Größe einfach nur dessen Produkt mit dem Faktor $s/100$.
Auf unsere 60%-80%-Frage angewandt bedeutet diese einfache Erkenntnis, daß im ersten Fall mit 80/100 und anschließend mit 60/100 multipliziert werden muß, im zweiten Fall dagegen in umgekehrter Reihenfolge. Aus der Kommutativität der Multiplikation erkennt man nun sofort, daß beide Vorgehensweisen das selbe Ergebnis liefern.

So eingestimmt in das Berechnen von Prozenten wird mir nun jeder zustimmen, daß bei einem Zinssatz von $s\%$ der jährliche Zuwachs meines Guthabens G genau $s/100 \cdot G$ beträgt. Mit anderen Worten, Zinszahlung nach einem Jahr bedeutet nichts anderes als die Multipikation des Guthabens mit dem Faktor $(1+s/100)$. Mit dieser Sicht ist es nun übrigens auch nicht schwer zu berechnen, was nach mehreren (z.B. k) Jahren passiert: Das anfängliche Guthaben multipliziert sich mit dem Faktor $(1+s/100)^k$ – und das beinhaltet schon alle auftretenden Zinseszinseffekte.

Wir wollen uns aber im folgenden auf ein einzelnes Jahr konzentrieren (bei einem unveränderten Zinssatz von $s\%$). Was würde hier eine monatliche Verzinsung bedeuten? Nach kurzem Nachdenken sehen wir, daß wir dazu schon alle mathematischen Voraussetzungen zur Verfügung haben: Monatlich wächst unser Vermögen um

$(s/12)\%$, d.h. es wird mit $(1+s/(12\cdot 100))$ multipliziert. Nach 12 solchen Zinsperioden (also insgesamt einem Jahr) ist das Guthaben dann auf das $(1+s/(12\cdot 100))^{12}$-fache gestiegen.

Wir können jetzt jährliche Verzinsung (Multiplikation mit $(1+s/100)$) und monatliche Verzinsung (Multiplikation mit $(1+s/(12\cdot 100))^{12}$) direkt miteinander vergleichen. Das soll zunächst an einem Zahlenbeispiel geschehen, bei dem wir drei verschiedene Zinssätze betrachten werden - 1%, 10% (solche Zinssätze gab es vor einigen Jahren tatsächlich) und 300% (das kommt sicherlich nur in sehr inflationären Zeiten vor). Ausgehend von einem Kapital von 10.000 € ergibt sich nach einem Jahr das folgende Guthaben:

	$s=1$	$s=10$	$s=300$
jährliche Verzinsung	10.100 €	11.000 €	40.000 €
monatliche Verzinsung	$10.100,46$ €	$11.047,13$ €	$145.519,15$ €

Wir können aber auch versuchen, die beiden Faktoren für allgemeine s zu vergleichen. Nach Ausmultiplizieren der 12-ten Potenz (oder gelehrt gesagt, nach Anwendung des binomischen Satzes) erhalten wir

$$\left(1+\frac{s}{12\cdot 100}\right)^{12}=\sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}1^{12-i}\left(\frac{s}{12\cdot 100}\right)^{i}=\left(1+\frac{s}{100}\right)+\frac{11}{24}\left(\frac{s}{100}\right)^{2}+\frac{55}{432}\left(\frac{s}{100}\right)^{3}+\dots.$$

Bei monatlicher Verzinsung treten also zusätzlich Potenzen $(s/100)^i$ (mit $i\geq 2$) auf. Bei kleinem s ist dabei vielleicht gerade noch der quadratische Term spürbar - die Restterme können wegen der immer kleiner werdenden Koeffizienten, aber vor allem der hohen Potenzen in s wegen, vernachlässigt werden. Ganz anders sieht das natürlich in inflationären Zeiten aus: Je höher die Potenz von s, desto stärker fällt sie ins Gewicht.

Aber auch bei "normalen" Zinssätzen haben wir an der Tabelle gesehen, daß der quadratische s-Term unseren Gewinn bei monatlicher Verzinsung wenigstens etwas vergrößert hat. Wir sollten also jetzt das Zinsintervall verkürzen und tägliche oder vielleicht sogar stündliche Verzinsung betrachten. Das bietet natürlich keine Bank an, aber wir wollen wenigstens errechnen, ob sich solch ein Angebot für uns lohnen würde.

Nehmen wir an, es gibt n-mal im Jahr in regelmäßigen Abständen Zinsen. Dann ist es nach den vorangegangenen Diskussionen klar, daß sich der jährliche Guthaben-Vergrößerungsfaktor c_n folgendermaßen berechnet:

$$c_n=\left(1+\frac{s}{n\cdot 100}\right)^{n}.$$

Dabei ergeben sich die Faktoren für jährliche, monatliche, tägliche und stündliche Verzinsung durch das Einsetzen der entsprechenden Zahlen (nämlich 1, 12, 365 oder 8760) für n.

Wenn nun n sogar gegen Unendlich strebt, so bedeutet das Verzinsung des vorhandenen Kapitals in jedem Moment – wir nennen das Momentanverzinsung. Die eingangs gestellte Frage kann also nun folgendermaßen formuliert werden: Wie groß ist (bei einem Zinssatz von s%) die Momentanverzinsung? Oder, wogegen strebt c_n, falls n beliebig groß wird, d.h. was ist $\lim_{n\to\infty} c_n$? Für die Beantwortung dieser Frage ist die folgende kleine Umformung nützlich:

$$c_n = \left(1 + \frac{s}{n \cdot 100}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{s}{n \cdot 100}\right)^{\frac{n \cdot 100}{s}}\right]^{\frac{s}{100}}$$

Der Ausdruck sieht zunächst komplizierter aus, als er vorher war – aber der entscheidende Sachverhalt ist folgender: Wenn n gegen ∞ strebt, so auch $(n \cdot 100)/s$. Nennen wir diese Zahl k, so gilt also

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \left[\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k\right]^{\frac{s}{100}} .$$

Der in der Mitte stehende Term $\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k$ ist dabei der interessante Teil. Dieser Grenzwert ist den Mathematikern gut bekannt, es ist die irrationale Zahl e (die Basis für den natürlichen Logarithmus ln). Die ersten Dezimalstellen von e lauten $e = 2,7183\ldots$. Als Kapital-Vergrößerungsfaktor für den Momentanzins erhalten wir damit also

$$c_\infty := \lim_{n\to\infty} c_n = e^{\frac{s}{100}} .$$

(Wie ich übrigens von einem Schweizer Kollegen erfahren habe, wird dort die e-Funktion in der Schule mittels des Momentanzins' eingeführt. Letzterer ist wohl für jeden Schweizer ein grundlegender Begriff.)

Abschließend (für den ersten Teil) wollen wir nun unseren obigen Vergleich zwischen jährlicher und monatlicher Verzinsung um die Momentanverzinsung erweitern; wir beginnen mit der allgemeinen Betrachtung und ergänzen danach unsere Tabelle: Viele wichtige Funktionen lassen sich als unendliche Summen (ihre sogenannte Taylorreihe) entwickeln. Tut man das mit der Exponentialfunktion e^x, so ergibt sich

$$c_\infty = e^{\frac{s}{100}} = \left(1 + \frac{s}{100}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{100}\right)^3 + \ldots .$$

Gegenüber der monatlichen Verzinsung sind die Koeffizienten also leicht gestiegen (1/2 statt 11/24 und 1/6 statt 55/432). In konkretem Geld drückt sich der Unterschied folgendermaßen aus:

	$s = 1$	$s = 10$	$s = 300$
Momentanverzinsung	$10.100,50$ €	$11.051,71$ €	$200.855,37$ €

Als Ergebnis kann man formulieren, daß es bei besonders kleinen Zinssätzen (wie z.B. 1%) ziemlich egal ist, wie oft verzinst wird. In guten Zinsjahren macht die monatliche gegenüber der jährlichen Vergütung schon einen spürbaren Unterschied (z.B. 47 € bei 10%-iger Verzinsung von 10.000 €); eine weitere Verkürzung des Zinstaktes ist dagegen weniger wichtig. Ganz anders ist das Bild in Inflationszeiten:

Hier sollte man die Bank so oft wie möglich aufsuchen und seine Zinsen einfordern.

Im Titel sind zwei verschiedene Formen der Geldanlage angekündigt worden. Mit dem Momentanzins haben wir bereits die erste besprochen. Die zweite ist von völlig anderer Natur: Wir wollen uns Gedanken machen, was man mit dem bisher verdienten Geld tun könnte; wir wollen es in 1-€-Stücken sammeln und diese dann stapeln (auf einem Stapel *anlegen*). Wenn wir genug Geld haben, kann dieser Stapel beliebig hoch werden. Die Frage, die ich aufwerfen möchte, ist die folgende:
Um wieviele Durchmesser einer Münze kann der Stapel maximal überhängen? Ist es möglich, daß (in der Draufsicht) die obere Münze die untere gar nicht mehr berührt? Können wir es sogar einrichten, daß zwischen beiden noch eine Münze Zwischenraum bleibt? Wieviel Geld brauchen wir dafür? Wenn der Zusammenhang mit unserer ersten Fragestellung doch nur recht oberflächlich erscheint, so werden wir doch wieder bei der Exponentialfunktion enden.
Noch ein Tip: Die folgenden Ausführungen können von jedem Leser experimentell begleitet werden. Wem nach der vorzeitigen Zahlung des alpha-Abonnementes das nötige Kleingeld dazu fehlt, der kann ersatzweise Spielkarten benutzen.

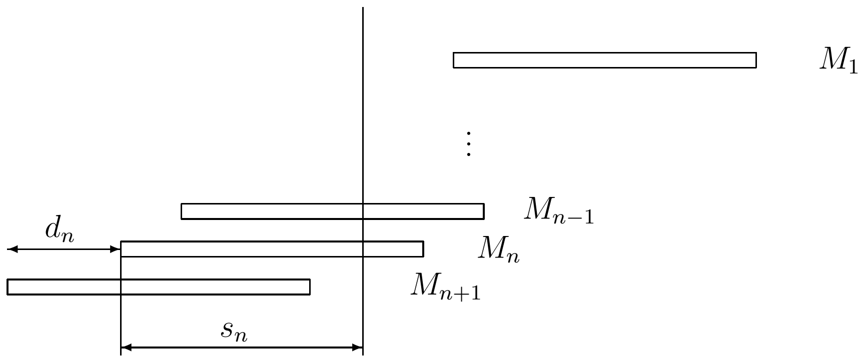
Wir wollen den Radius unserer Münze mit 1 annehmen. Mit einem Stapel aus zwei Münzen sind wir bereits fast in der Lage, einen Überhang von 1 zu erzeugen – doch mit einer möglichen dritten Münze haben wir dann nur noch wenig Spielraum, wenn der Turm nicht kippen soll. In dieser kurzen Beschreibung zeigt sich schon ein Problem: Will man den Spielraum der oberen Münzen vergrößern, so muß man den unteren Teil des Stapels nachträglich korrigieren und etwas bescheidener (bzgl. des Überhanges) gestalten. Die entscheidende Idee zur mathematischen Bearbeitung des Problems wird daher sein, sich von dem Bild des Stapelns (als Vorgang) zu trennen; wir werden unsere Münzen rückwärts, von oben nach unten "anlegen". Das ist wohl in der Praxis recht schwierig, aber theoretisch wissen wir dann in jedem Schritt, wie weit wir den Überhang bauen dürfen, ohne daß der Turm kippt.

Bevor wir mit den Berechnungen beginnen, wollen wir zur Einstimmung ein kleines Gedankenexperiment durchführen: Angenommen, wir hätten einen Stapel (bestehend aus N Münzen) mit dem Überhang k vor uns zu stehen. Dann stellen wir uns eine weitere, aber irreguläre Münze vor – sie sei von der selben Größe wie die übrigen, aber sehr viel dünner (und damit leichter). Die Dicke unserer neuen Münze sei ein m-tel der Dicke normaler Münzen. Ist nun m groß genug, d.h. ist das neue Geldstück leicht genug, dann sollte es uns jetzt nicht schwer fallen, es ganz oben mit zusätzlichen Überhang von z.B. $0,9$ zu plazieren. Der Gesamtausschlag des neuen Turmes beträgt dann $k + 0,9$. Dieser Turm ist natürlich kein regulärer, da wir an der Dicke der Geldstücke manipuliert haben.
Das läßt sich aber nachträglich wieder korrigieren: Wir ersetzen jede normale Münze durch m direkt übereinander liegende und die obere (dünne) duch eine normale Münze. (Das ist wohl nur theoretisch möglich, aber es handelt sich ja auch um ein *Gedanken*experiment!). Dann ist die Höhe des Stapels auf das m-fache gewachsen,

er steht aber noch immer mehr oder weniger stabil und hat einen Überhang von $k + 0,9$. Das Wichtige an dieser Konstruktion ist aber, daß durch das Verdicken der oberen Münze der Turm ein regulärer geworden ist – bestehend aus $(mN + 1)$ Geldstücken gleichen Typs.
Welchen erstaunlichen Schluß läßt dieses Gedankenexperiment zu? Ich behaupte, daß es schon einige der eingangs aufgeworfenen Fragen beantwortet. Wem das nicht klar ist, oder wer an quantitativeren Aussagen interessiert ist, der muß weiterlesen.

Bezeichne in einem Geldstapel $d_n \in I\!R$ den Überhang der n-ten Münze M_n, von oben gezählt, gegenüber der $(n+1)$-ten M_{n+1} (auf der sie liegt). Wir wollen annehmen, daß unser Stapel stets nach nur einer Seite (nach rechts) lastig ist, d.h. $d_n \geq 0$. Sei darüberhinaus s_n der Abstand des Schwerpunktes des aus den oberen n Münzen bestehenden Turmes von seinem linken Rand.

Schwerpunkt von $M_1, \ldots, M_n$



Die Bedingung, daß der Turm zwischen den Münzen M_n und M_{n+1} nicht kippt, ist äquivalent zu der Tatsache, daß der Schwerpunkt der oberen n Münzen nicht jenseits des rechten Randes von M_{n+1} liegt. (In unserer Skizze ist das gerade *nicht* erfüllt!) Wir erhalten die Ungleichung

$$d_n + s_n < 2\,.$$

Die Größen d_n und s_n sind nicht unabhängig voneinander; sind die d_n (und damit die Form des Turmes) gegeben, so lassen sich die Schwerpunkte rekursiv berechnen: Zunächst ist sicherlich klar, daß $s_1 = 1$ gilt. Seien danach die Schwerpunkte $s_1, \ldots, s_n$ als bekannt vorausgesetzt. Der Schwerpunkt von $\{M_1, \ldots, M_n\}$ hat dann vom linken Rand von M_{n+1} den Abstand $(d_n + s_n)$; der Schwerpunkt von M_{n+1} selbst hat wieder den Abstand 1. Um den Abstand des Gesamtschwerpunktes vom linken Rand von M_{n+1} zu bestimmen, müssen diese beide Zahlen gemittelt werden – natürlich unter Beachtung der Tatsache, daß $\{M_1, \ldots, M_n\}$ das n-fache Gewicht von M_{n+1} hat. Wir erhalten

$$s_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \Big(n \cdot (d_n + s_n) + 1 \cdot 1\Big)\,.$$

Mit der Substitution $D_n := n\,d_n$ und $S_n := n\,s_n$ ergeben sich also insgesamt

$$D_n + S_n < 2n \quad \text{und} \quad S_{n+1} = D_n + S_n + 1 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Unser Ziel ist es nun zu untersuchen, wie groß der Gesamtüberhang

$$g(N) := \sum_{n=1}^{N} d_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{D_n}{n}$$

eines Stapels aus $(N+1)$ Münzen maximal sein kann. Darüberhinaus wollen wir das asymptotische Verhalten der entstehenden Funktion $g_{\max}(N)$ für $N \to \infty$ studieren.

Ein mehr oder weniger naiver Zugang zur Bestimmung maximal überhängender Stapel ist der folgende: Da wir daran interessiert sind, die Zahlen D_n zu maximieren, versuchen wir, die “Stabilitätsungleichung” $D_n + S_n < 2n$ möglichst knapp zu erfüllen. Der uns interessierende Grenzfall tritt dabei genau mit $D_n + S_n = 2n$ ein - alle Schwerpunkte liegen stets am äußersten rechten Rand der darunter liegenden Münze. Solch ein Stapel steht nicht mehr, kippt aber auch noch nicht um. Durch hinreichend kleine Korrekturen gelingt es aber stets, diesen Turm zu stabilisieren und trotzdem den Gesamtüberhang nur wenig zu schmälern. Nehmen wir also Gleichheit $D_n + S_n = 2n$ an, dann ergibt sich

$$S_{n+1} = D_n + S_n + 1 = 2n + 1 \qquad \text{für alle } n.$$

Insbesondere erhalten wir $S_n = 2n - 1$ und können das wiederum in die Gleichung $D_n + S_n = 2n$ einsetzen. Als Ergebnis folgt

$$D_n = 1 \quad \text{und damit} \quad d_n = \frac{1}{n}\,.$$

Die maximale (aber nie ganz erreichbare) Auslenkung eines Turmes aus $(N + 1)$ Münzen wird daher durch die sogenannte harmonische Reihe beschrieben, sie beträgt

$$g_{\max}(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,.$$

Für die pingeligeren Leser unter Euch (wie z.B. die Chefredakteurin Monika Noack) wollen wir aber schnell versuchen, unser vielleicht etwas wackliges Argument (mit der Gleichung $D_n + S_n = 2n$) zu verbessern. Wir beweisen jetzt ohne alle Tricks, daß $g(N) = \sum_{n=1}^{N} d_n$ stets kleiner als $\sum_{n=1}^{N} 1/n$ sein muß:
Zunächst ist es leicht möglich, die Größen S_n aus unseren Stapel-Bedingungen zu eliminieren. Die Rekursionsformel $S_{n+1} = D_n + S_n + 1$ ist äquivalent zu $S_N = \sum_{n=1}^{N-1} D_n + N$, und die Ungleichungen $D_N + S_N < 2N$ übersetzen sich dann in

$$\sum_{n=1}^{N} D_n < N$$

als die einzig vorhandenen Bedingungen für einen Turm mit $d_n = D_n/n$ als Überhang an der Münze M_n. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \tfrac{D_n}{n} &= \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D_n + \left(\tfrac{1}{N-1} - \tfrac{1}{N}\right) \sum_{n=1}^{N-1} D_n + \left(\tfrac{1}{N-2} - \tfrac{1}{N-1}\right) \sum_{n=1}^{N-2} D_n + \ldots + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) D_1 \\
&< \tfrac{1}{N} \cdot N + \left(\tfrac{1}{N-1} - \tfrac{1}{N}\right) \cdot (N-1) + \left(\tfrac{1}{N-2} - \tfrac{1}{N-1}\right) \cdot (N-2) + \ldots + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \cdot 1 \\
&= \tfrac{1}{N} \cdot N + \tfrac{1}{N(N-1)} \cdot (N-1) + \tfrac{1}{(N-1)(N-2)} \cdot (N-2) + \ldots + \tfrac{1}{1 \cdot 2} \cdot 1 \\
&= 1 + \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N-1} + \ldots + \tfrac{1}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{n} = g_{\max}(N)\,.
\end{aligned}$$

Nachdem wir uns also davon überzeugt haben, daß $g_{\max}(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ tatsächlich den maximalen Stapelüberhang (bei Stapelhöhe $N+1$) beschreibt, wollen wir diese Funktion näher untersuchen. Sie ordnet jedem N die N-te Teilsumme der harmonischen Reihe (d.h. unendlichen Summe)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{N} + \ldots$$

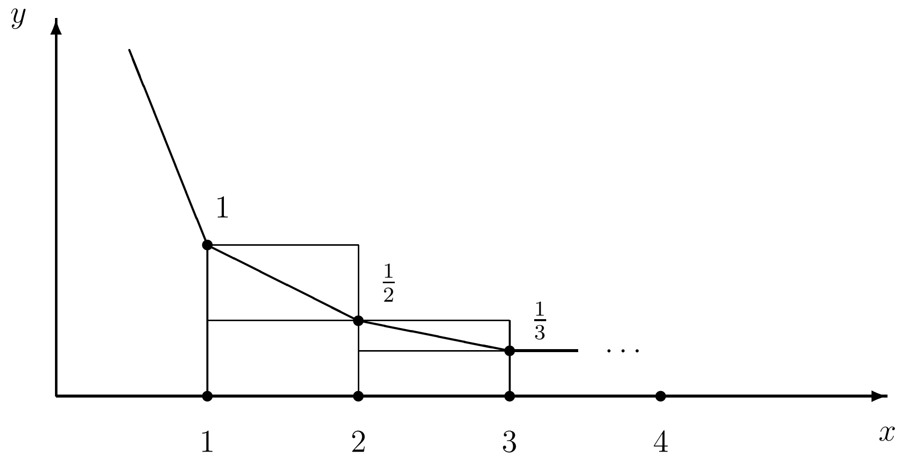
zu. Diese Reihe verdankt ihren Namen der Tatsache, daß jeder ihrer Summanden das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarn ist. Berühmt ist die harmonische Reihe aber deshalb, weil sie wohl das einfachste Beispiel einer unendlichen Summe darstellt, die trotz gegen Null strebender Summanden divergiert (d.h. Unendlich ergibt). Den erstaunlich einfachen Beweis für diese Eigenschaft wollen wir hier kurz präsentieren: Man faßt die Summanden der unendliche Summe $\sum_{n \geq 1} 1/n$ geschickt zu immer größer werdenden Gruppen zusammen und schätzt diese dann nach unten ab

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \ldots .$$

Die harmonische Reihe ist damit größer als $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$, und letztere Summe ergibt offensichtlich Unendlich.

Die bisher gemachten Betrachtungen beantworten uns schon einige der am Anfang aufgeworfenen Fragen: Wir haben bewiesen, daß unser Geldstapel *beliebig weit* überhängen kann – wenn man nur genügend viele Münzen zur Verfügung hat (und eine ruhige Hand besitzt). Nachdenkende Leser hatten das allerdings schon nach unserem Gedankenexperiment mit der dünnen Münze geahnt. Um auch jene Leser von der Nützlichkeit der obigen Berechnungen zu überzeugen, wollen wir noch einige quantitative Untersuchungen anschließen. Beantwortet werden sollen also Fragen wie z.B. "Wieviel Geld benötigt man, wenn zwischen oberster und unterster Münze noch 10 Geldstücke horizontal einschiebbar sein sollen (das entspricht einem Überhang von mindestens 22)?"

Wir denken uns dazu den positiven Teil des Graphen der Funktion $y = 1/x$ in ein kartesisches Koordinatensystem gezeichnet. (Wie mein mir gerade über die Schulter schauender Sohn Martin bemerkt hat, sind dann x und y auf dieser Kurve umgekehrt proportional zueinander.) Die Funktionswerte in den ganzzahligen Argumenten $1, 2, 3, \ldots$ sind dann genau die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, über die wir summieren wollen. In der folgenden Skizze haben wir diese Kurve duch einen Geradenzug angenähert – die Strecken verbinden nacheinander die Punkte $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{1}{3})$ usw.:



Über einem beliebigen, von $(n-1)$ nach n reichenden Teilstück der x-Achse ($n \geq 2$) können wir nun die folgenden, sukzessive ineinander enthaltenen Flächenstücke betrachten:

(i) Das kleine Rechteck mit der Höhe $\frac{1}{n}$; es liegt unter der Kurve $xy = 1$ und hat den Flächeninhalt $\frac{1}{n}$.

(ii) Den Inhalt der gesamten Fläche unter der Kurve $xy = 1$ bezeichnen wir mit F_n.

(iii) Die Hyperbel $xy = 1$ liegt knapp unter der von uns oben skizzierten "Knickkurve". Daher ist das von der Verbindungsstrecke der Punkte $(n-1, \frac{1}{n-1})$ und $(n, \frac{1}{n})$ begrenzte Trapez größer als die Fläche von (ii). Das Trapez hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n})$.

(iv) Schließlich gibt es das große Rechteck mit der Höhe $\frac{1}{n-1}$. Es hat den Flächeninhalt $\frac{1}{n-1}$.

Der Vergleich der Flächeninhalte von (i), (ii) und (iii) liefert nach anschließendem Aufsummieren die Ungleichungen

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big) - 1 \;=\; \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \;<\; \sum_{n=2}^{N} F_n \;<\; \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}\Big) \;=\; \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} \quad (N \geq 2)\,.$$

Das gibt uns die Möglichkeit, den maximalen Überhang $g_{\max}(N) = \sum_{n=1}^{N} 1/n$ mit einem Fehler von höchstens $1/2$ zu bestimmen - vorausgesetzt, wir kennen den

Flächeninhalt $\sum_{n=2}^{N} F_n$ zwischen x-Achse und Hyperbel (begrenzt von $x_1 = 1$ und $x_2 = N$). Diese Aufgabe ist nun allerdings leicht zu lösen, wenn man die Integralrechnung zur Verfügung hat; es gilt

$$\sum_{n=2}^{N} F_n \;=\; \int_1^N \frac{1}{x}\, dx \;=\; \ln x \Big|_1^N \;=\; \ln N\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\Big(\ln N\Big) + \frac{1}{2} \;<\; g_{\max}(N) \;<\; \Big(\ln N\Big) + 1 \qquad (\text{für } N \geq 2)$$

und können damit die Frage nach dem Turm mit dem 10-er Zwischenraum (d.h. Überhang 22) wenigstens näherungsweise beantworten:
$g_{\max}(N) > 22$ setzt $\ln N > 21$ voraus und ist bei $\ln N > 21,5$ sicher erfüllt. Wegen $e^{21} \approx 1.318.815.734,483$ und $e^{21,5} \approx 2.174.359.552,576$ benötigen wir für solch einen Turm also ungefähr 2 Milliarden EUR.
Falls man sich trotzdem entschließt, solch einen hohen Turm zu bauen, so sollte man anschließend folgende kleine Mühe nicht mehr scheuen: Aus gebührendem Abstand und auf dem Kopf stehend betrachte man den eben errichteten schiefen Geldturm - man erkennt dann darin leicht den Graphen einer bekannten Funktion, die schon für den Momentanzins wichtig war. Welche ist es?