Teilprojekt A1: Strings, D–Branes und Mannigfaltigkeiten spezieller Holonomie

Projektleiter: Georg Hein, Stefan Theisen

Die Mirrorsymmetrie zwischen Familien von Calabi–Yau Varietäten ist ein typisches Beispiel der Beeinflussung der Mathematik durch die Physik. Während in der Stringtheorie die Mirrorsymmetrie akzeptiert ist, gibt es nach wie vor kein befriedigendes mathematisches Modell. Ein Hauptziel dieses Projektes ist es, diese Verbindung zwischen Mathematik und Physik besser zu verstehen. Dabei wollen wir unter anderem versuchen, die folgenden Ansätze weiterzuentwickeln.

Derivierte Kategorien

Objekte der derivierten Kategorie entsprechen D–Branes vom B–Typ, die im IIA–Modell der Stringtheorie auftreten. Fourier–Mukai Transformationen liefern Autoäquivalenzen dieser Kategorien. Gerade im Falle von Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten treten hier interessante Äquivalenzen auf.

Abbildung: Eine K3–Fläche

Ein wichtige Klasse von Fourier–Mukai Transformationen erhält man durch zweidimensionale feine Modulräume stabiler Garben auf K3–Flächen. Dabei ist die universelle Familie $\mathcal{E}$ der Fourier–Mukai Kern. Betrachten wir die Projektionen

$$X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y\,,$$

so erhalten wir die zwei Fourier–Mukai Transformationen

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{FM}_{\mathcal{E}}: & D(X) & \to & D(Y) \\ & F & \mapsto & p_{Y*}(\mathcal{E} \otimes p_X^* F) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{FM}_{\mathcal{E}^\vee}: & D(Y) & \to & D(X) \\ & G & \mapsto & p_{X*}(\mathcal{E}^\vee \otimes p_Y^* G). \end{array}$$

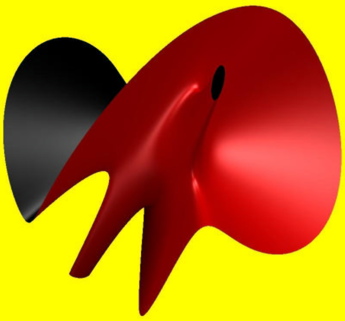

Abbildung: Die mirrorsymmetrische K3–Fläche

Die beiden Fourier–Mukai Transformationen erfüllen
$\mathrm{FM}_{\mathcal{E}} \circ \mathrm{FM}_{\mathcal{E}^\vee} = [-\dim(X)]$ und $\mathrm{FM}_{\mathcal{E}^\vee} \circ \mathrm{FM}_{\mathcal{E}} = [-\dim(Y)]$.

Die beiden Transformationen sind also bis auf eine Verschiebung zueinander invers.

Reflexive Polyeder

Die Konstruktion von Batyrev, die dualen Paaren reflexiver Polyeder der Mirrorpaare von Familien von Calabi–Yau Varietäten zuordnet, liefert nach wie vor die größte Beispielklasse von Calabi–Yau Varietäten. Die Dualität zweier Polyeder ist leicht zu verstehen, während die Mirrorsymmetrie noch immer nicht befriedigend definiert werden kann.

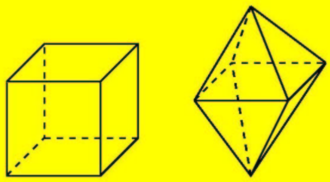

Abbildung: Ein Paar dualer Polyeder

Ist $\Delta \subset M$ ein Gitterpolyeder, so ist sein duales Polyeder durch

$$\Delta^\vee := \{x \in M^\vee \otimes \mathbb{Q} \mid \langle x, y\rangle \geq -1 \text{ für alle } y \in \Delta\}$$

definiert. Die Reflexivität von Δ bedeutet, dass auch $\Delta^\vee$ ein Gitterpolyeder ist. Einem Polyeder Δ können wir eine torische Varietät X_Δ zuordnen. Diese hat Schnitte im antikanonischen Bündel, die aufgrund der Adjunktionsformel eine Familie von Calabi–Yau Varietäten definieren.
Der Ansatz von Gross und Siebert verspricht eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion. Der Ausgangspunkt hierbei ist eine Triangulierung der Sphäre S^n.

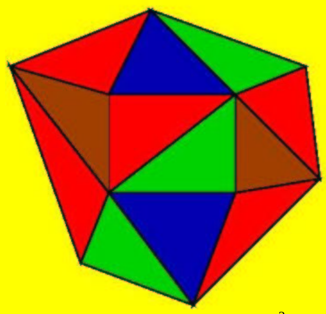

Abbildung: Eine Triangulierung der S^2

Dieser Triangulierung wird eine singuläre Calabi–Yau Varietät zugeordnet, deren irreduzible Komponenten torische Varietäten sind. Diese singuläre Varietät kann unter bestimmten Umständen geglättet werden, was uns eine Familie von glatten Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten liefert.
Dieser Zugang ist sowohl vielversprechend als auch ausbaufähig. So kann, da hier die singuläre Faser im Mittelpunkt steht, eine gute Beschreibung der Monodromie von Familien von Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten erwartet werden.

Torusfaserungen

Während D–Branes vom B–Typ algebraischen Zykeln entsprechen können, sind jene vom A–Typ von ungerader reeller Dimension. Daher ist für das IIB–Modell die Untersuchung von generischen Torusfaserungen interessant. Das sind Abbildungen $f : X \to B$, deren allgemeine Faser ein glatter Torus ist.

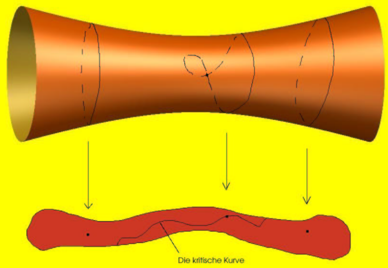

Abbildung: Eine generische Torusfaserung

Uns interessiert der Fall einer generischen T^3–Faserung über einer (reell) dreidimensionalen Basis B, deren kritische Werte $C \subset B$ eine glatte Kurve sind.
Ein möglicher Ansatz besteht darin, das Weierstraß-Modell elliptischer Kurven auf diesen Fall zu verallgemeinern.

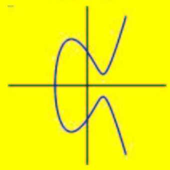

Abbildung: Elliptische Kurve und Weierstraß–Modell

Ist (E, L) eine elliptische Kurve mit einem metrisierten holomorphem Geradenbündel, so ist die Menge $\{l \in L \text{ mit } ||l|| = 1\}$ ein S^1–Bündel über der Kurve E. Da wir jedem Punkt des Modulraumes $\mathcal{M}_{1,n}$ eine elliptische Kurve und ein Geradenbündel vom Grad n zuordnen können, sollte sich auf diese Weise jedem dreidimensionalen Zykel $B \to \mathcal{M}_{1,n}$ eine generische Torusfaserung über B zuordnen lassen. Zykeln $B \to \mathcal{M}_{1,3}$ dürften dabei besonders interessant sein.

Arbeitsgruppe:

Dr. Georg Hein (FU Berlin)
Professor Dr. Stefan Theisen (AEI Golm)

Professor Dr. Klaus Altmann (FU Berlin)
Dr. Klaus Behrndt (AEI Golm)
Dipl. Math. David Ploog (FU Berlin)
Dr. Jürg Käppeli (AEI Golm)

beantragte EA in A1:

Dr. Björn Andreas	HU Berlin	BAT IIa
Dr. Christian Haase	Duke Univ.	$\frac{1}{2}$ BAT IIa

Beziehung zu anderen Projekten:

SFB: A2, A3, A5
DFG-SPP 1094
GIF I–713–109.14/2001
LMU, München
Madison University, Wisconsin
Harvard University, Massachusetts
Ecole Polytechniques, Paris
Queen Mary College, London
Universidad de Salamanca
Jussieu, Paris