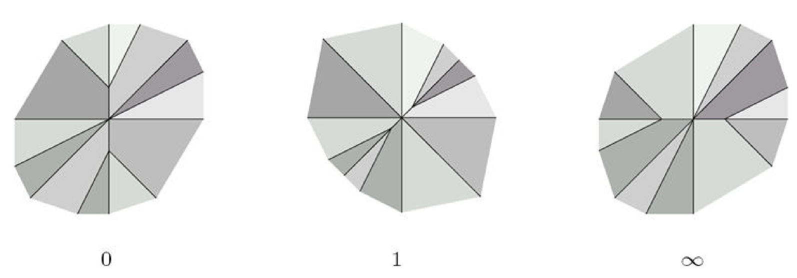
A3: Singularities in Manifolds with Special Holonomy

Leiter: Prof. Dr. Klaus Altmann, PD Dr. habil. Priska Jahnke

Wesentlicher Bestandteil dieses Projekts ist die Beschreibung von T-Varietäten, die die Theorie torischer Varietäten auf Wirkungen höherer Komplexität verallgemeinern. Wir interessieren uns dabei sowohl für ihre Deformationstheorie, in welche sich auch jene der torischen Varietäten einbetten lässt, als auch für Divisoren und Vektorbündel über ihnen. Ferner konzentrieren wir uns auf die Frage nach der Simulation minimaler Auflösungen von Singularitäten, deren Grundlage die berühmte McKay-Korrespondenz darstellt.
Von besonderem Interesse für die Stringtheorie wiederum sind Calabi-Yau-Varietäten, welche z. B. als vollständige Durchschnitte von Fano-Varietäten auftreten. Hierbei steht die Klassifikation von singulären Fano-Varietäten und ihrer krepanten Auflösungen im Zentrum unserer Untersuchungen, wobei maßgeblich von der Theorie der T-Varietäten Gebrauch gemacht werden soll.
Komplex vierdimensionale Calabi-Yau-Varietäten, die durch krepante Auflösungen von singulären Weierstrass-Modellen entstehen, sind von Interesse für F-Theorie Kompaktifizierungen und von Bedeutung für nicht-triviale Tests der vermuteten heterotischen String/F-Theorie Dualität.

Divisoren und Geradenbündel auf T-Varietäten

Vorbild für die Konstruktion polyedrischer Divisoren zur Beschreibung von T-Varietäten waren die torischen Varietäten. Ein tieferliegendes Verständnis der T-Varietäten soll nun durch das Studium ihrer Picard- und Divisorenklassengruppen, d.h. äquivarianter Geradenbündel und Divisoren erreicht werden. Eine Verallgemeinerung der Beschreibung auf Bündel höheren Ranges wäre ebenfalls wünschenswert. Gleichzeitig soll die Kohomologie dieser Garben untersucht werden, was im Fall von Geradenbündeln sogar zu Anwendungen in der Codierungstheorie führt.



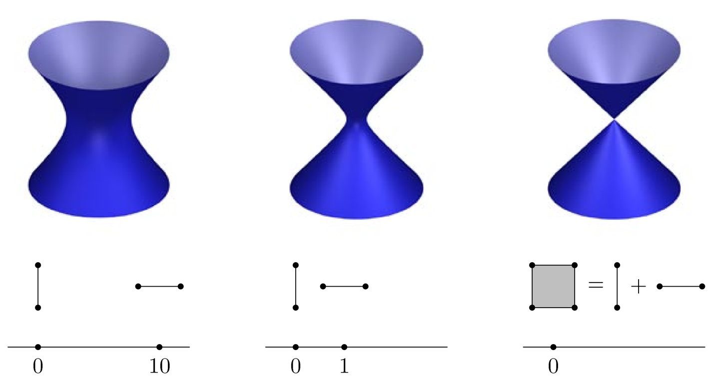
Der divisorielle Fächer des Kotangentialbündels Ω_{dP_6} über der DelPezzo-Fläche dP_6.

Calabi-Yau-Varietäten und Eichbündel

Die Motivation dieses Projekts ist die Konstruktion vierdimensionaler effektiver Feldtheorien durch die Kompaktifizierung der F-Theorie bzw. der heterotischen Stringtheorie. Dabei sind sowohl die Eichgruppe als auch Materie und Yukawa-Kopplungen durch die Singularitätenstruktur der Calabi-Yau-Varietäten bzw. durch die Strukturgruppe der entsprechenden Eichbündel bestimmt.
Ziel ist es, singuläre Weierstrass-Modelle, die eine krepante Auflösung besitzen, zu klassifizieren, sowie Calabi-Yau-Varietäten mit freien Gruppenwirkungen und äquivarianten Eichbündeln zu konstruieren. Als konkrete Untersuchungsmethode dient die torische Geometrie und die Stratifizierung der Calabi-Yau-Geometrie. Diese hat bereits in einfachen Fällen auf neue Fasertypen geführt, die nicht in der Kodaira-Klassifikation enthalten sind. Desweiteren dienen Fourier-Mukai-Transformationen zur expliziten Konstruktion von Eichbündeln.

Deformationstheorie von T-Varietäten

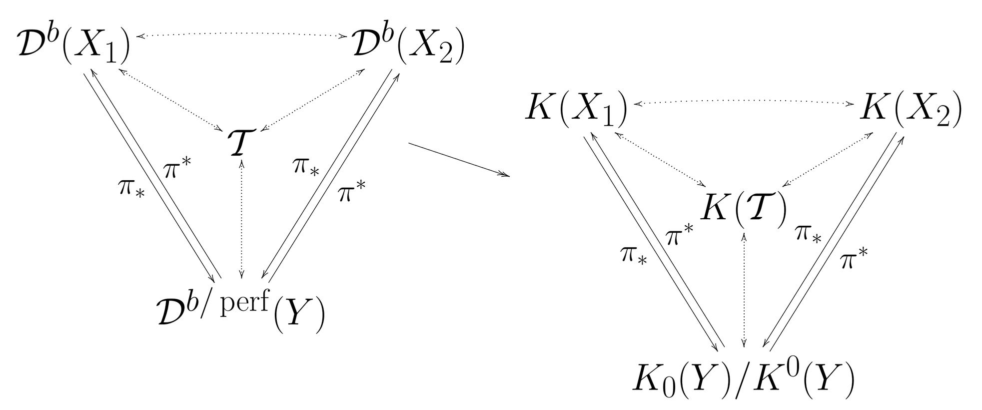
T-Varietäten werden durch Divisoren mit polyedrischen Koeffizienten beschrieben. Die Grundidee ist es, Deformationen dieser Varietäten durch die Aufspaltung der Koeffizienten in Minkowskisummanden zu beschreiben. Im Fall torischer Varietäten kann man so Deformationen unterschiedlicher Gewichte kombinieren. Dadurch zu erhaltende Glättungen spielen eine wichtige Rolle im Minimal Model Program.



Eine äquivariante Deformation des Kegels $\mathcal{C}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}})$ zu $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ mit polyedrischen Divisoren.

Triangulierte Auflösungen von Singularitäten

In niedrigen Dimensionen existiert eine eindeutige, minimale Auflösung einer Singularität X. In höheren Dimensionen gehen im Allgemeinen sowohl Eindeutigkeit als auch Minimalität verloren. Dieser Umstand kann so gedeutet werden, dass es einerseits keine kanonische Wahl einer Auflösung $\pi : \tilde{X} \to X$ gibt und andererseits $\tilde{X}$ zusätzliche Struktur aufweisen kann, die nicht von der Singularität X herrührt. Jeder Varietät X lässt sich eine triangulierte Kategorie zuordnen: die derivierte Kategorie $\mathcal{D}^b(X)$. Diese bestimmt in vielen Fällen X eindeutig.
Die Frage ist nun, ob vielleicht eine eindeutige, minimale triangulierte Auflösung $\mathcal{T}$ existiert, die zwar nicht unbedingt als derivierte Kategorie einer Varietät realisiert wird, aber derivierte Eigenschaften einer gewöhnlichen Auflösung aufweist.



Die minimale triangulierte Auflösung $\mathcal{T}$ von Y unter den geometrischen Auflösungen X_1 und X_2 mit dem „Schatten“ der triangulierten Kategorien in den Grothendieck-Gruppen.

Familien von Fano-Varietäten – Degeneration und Invarianten

Eine projektive komplexe Varietät $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ heißt Fano-Varietät, wenn ihr antikanonischer Divisor $-K_X$ ein amples Geradenbündel ist. Allgemeine Hyperebenenschnitte von X definieren spezielle Calabi-Yau-Varietäten $V \subset X$, die eine wichtige Rolle in der Stringtheorie spielen. Versteht man die Geometrie des umgebenden Raumes X, so lassen sich oft Eigenschaften von V folgern. Ziel des Projekts ist das Studium singulärer Fano-Varietäten der komplexen Dimension 3 und ihr Verhalten in Deformationsfamilien.

Fano-Varietäten mit kleiner Toruswirkung und ihre Flops

Dreidimensionale Fast-Fano Räume X, die über einer nicht minimalen Fläche S gefasert sind, können zu einfacheren X_0 über der kontrahierten Fläche S_0 verwandelt werden – das geschieht mit einer Folge von Flops und Auf- und Niederblasungen. Sind dabei alle Objekte torisch, so lässt sich dieser Prozess explizit verfolgen und detailliert untersuchen. Wir wollen jetzt die Theorie der T-Varietäten nutzen, um das auch im Fall einer kleineren Toruswirkung in vergleichbarer Weise zu verstehen.

Spiegelsymmetrie in der Fano-Geometrie

Die Ursprünge der Spiegelsymmetrie liegen in der Physik – gemeint ist die Paarung zweier Familien von Calabi-Yau-Varietäten. Eine mögliche Anwendung in der Fano-Geometrie basiert auf folgender Beobachtung. Ist X eine glatte primitive Fano-Dreifaltigkeit, so ist ihr Grad $d = 2g - 2$, $2 \leq g \leq 12$, $g \neq 11$. Fast genau dieselben Zahlen findet man noch einmal: Isomorphieklassen elliptischer Kurven, die einen Torsionspunkt der Ordnung $r = g$ enthalten, werden durch die Modulkurve $X_1(r)$ parametrisiert. Diese ist rational genau dann, wenn $1 \leq r \leq 12$, $r \neq 11$ gilt. Nur Zufall?

Arbeitsgruppen

Prof. Dr. Klaus Altmann, Dr. habil. Björn Andreas, René Birkner, Swantje Gährs, Andreas Hochenegger, Nathan Ilten, Lars Petersen, Robert Vollmert;
PD Dr. habil. Priska Jahnke, Fabian Golibrzuch

Beantragte EA in A3

4 BAT IIa/2
Dr. habil. Björn Andreas
Dipl.-Math. Swantje Gährs
Dipl.-Math. Fabian Golibrzuch
Dipl.-Math. Lars Petersen

Beziehung zu anderen Projekten

SFB: A1, A2, A9, A10
Intern. Graduiertenkolleg Arithmetic and Geometry
Berlin Mathematical School (BMS)