Analyse der Randomisiert Inkrementellen Konstruktion der Konvexen Hülle im Raum

Wolfgang Mulzer

1 Der Satz von Clarkson im Raum

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ eine dreidimensionale Punktmenge mit n Punkten in allgemeiner Lage (d.h., es liegen keine vier Punkte aus P in einer Ebene). Wir definieren die Menge $S_{\leq k}$ der $(\leq k)$-*Mengen* von P als

$$S_{\leq k} := \{Q \subseteq P \mid |Q| \leq k \text{ und } Q = P \cap h, h \text{ offener Halbraum}\}.$$

Der Satz von Clarkson liefert eine obere Schranke für die Anzahl der möglichen $(\leq k)$-Mengen.

Theorem 1. *Es gilt* $|S_{\leq k}| = O(nk^2)$.

Proof. Wer nehmen an, dass $3 \leq k \leq n-3$ ist, da ansonsten der Satz offensichtlich stimmt.

Wir beginnen mit einer Definition: Sei $0 \leq \ell \leq k$. Ein Paar $(\{p,q,r\}, s) \in \binom{P}{3} \times \{+,-\}$, bestehend aus einer Menge von drei verschiedenen Punkten aus P sowie einem Vorzeichen $+$ oder $-$, heißt ℓ-*Facette* genau dann, wenn $|P \cap h^s_{pqr}| = \ell$ ist. Hierbei bezeichne h^+_{pqr} den offenen Halbraum über der von p,q und r aufgespannten Ebene und h^-_{pqr} den offenen Halbraum unter der von $\{p,q,r\}$ aufgespannten Ebene. Sei $L_{\leq k}$ die Menge aller $(\leq k)$-Facetten.

Es gilt $|S_{\leq k}| = O(|L_{\leq k}|)$. Man kann nämlich jeder ℓ-Facette durch geeignetes Rotieren der definierenden Ebene konstant viele ℓ-, $(\ell+1)$- und $(\ell+2)$-Mengen zuordnen, und man kann jede $(\leq k)$-Menge auf diese Weise erzeugen.

Sei nun $R \subseteq P$ eine zufällige Teilmenge von P, die jeden Punkt $p \in P$ unabhänging mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ enthält. Wir betrachten die Menge $F(\mathrm{CH}(R))$ der Facetten auf der konvexen Hülle von R und bestimmen die erwartete Anzahl der Facetten auf zwei Arten.

Zum einen gilt für den Erwartungswert

$$\mathbf{E}[|F(\mathrm{CH}(R))|] \leq 2\mathbf{E}[|R|]) = 2n/k,$$

da die konvexe Hülle von R höchstens $2|R|-4$ Facetten hat und jeder Punkt aus P mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ in R enthalten ist.

Sei nun $X = (\{p,q,r\}, s\} \in \binom{P}{3} \times \{+,-\}$ ein Paar von einer Menge von drei Punkten aus P und einer Richtung, und sei I_X die Indikatorvariable für das Ereignis, dass X eine Facette von $\mathrm{CH}(R)$ definiert (in dem Sinne, dass $\{p,q,r\}$ eine Facette von $\mathrm{CH}(P)$ begrenzt und dass h^s_{pqr} die Hülle $\mathrm{CH}(R)$ *nicht* enthält). Dann gilt

$$\mathbf{E}[|F(\mathrm{CH}(R))|] = \sum_{(\{p,q,r\},s) \in \binom{P}{3} \times \{+,-\}} \mathbf{E}[I_X] \geq \sum_{X \in L_{\leq k}} \mathbf{E}[I_X],$$

aufgrund der Linearität des Erwartungswerts. Für eine $(\leq k)$-Facette X ist $\mathbf{E}[I_X]$ genau die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X eine Facette von $\mathrm{CH}(R)$ definiert. Damit dieses Ereignis eintritt, müssen gelten (i) $p, q, r \in R$; und (ii) $R \cap h^s_{pqr} = \emptyset$. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist mindestens $k^{-3}(1-1/k)^k$, da $|P \cap h^s_{pqr}| \leq k$ ist und die Punkte in R unabhängig gewählt wurden.

Es folgt:

$$\mathbf{E}[|F(\mathrm{CH}(R))|] \geq \sum_{X \in L_{\leq k}} \mathbf{E}[I_X] \geq \sum_{X \in L_{\leq k}} k^{-3}(1-1/k)^k \geq |L_{\leq k}|/4k^3,$$

da $k \geq 2$. Somit ist $|L_{\leq k}| \leq 4nk^2$ und $|S_{\leq k}| \leq O(nk^2)$. $\square$

2 Die Θ-Reihe im Raum

Sei P eine Punktmenge im Raum in allgemeiner Lage mit n Punkten. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Gesamtkosten für die Aktualisierung der Konfliktinformationen während der inkrementellen Konstruktion von $\mathrm{CH}(P)$ asymptotisch gegeben sind durch

$$\Theta := \sum_{(\{p,q,r\},s) \in \binom{P}{3} \times \{+,-\}} |P \cap h^s_{pqr}| \cdot [\text{Die Facette } (\{p,q,r\},s) \text{ wird im Laufe der RIK erzeugt}].$$

Hierbei ist h^s_{pqr} wie oben, und $[Z]$ ist die Iverson-Notation: $[Z] := 1$, falls die Aussage Z erfüllt ist, und $[Z] := 0$ sonst.

Die randomisiert inkrementelle Konstruktion von $\mathrm{CH}(P)$ wählt zunächst eine zufällige Permutation σ von P und fügt dann die Punkte gemäß der von σ vorgegebenen Reihenfolge in die konvexe Hülle ein. Wir wollen nun die erwarteten Konfliktänderungskosten ausrechnen. Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\sigma[\Theta] &= \sum_{(\{p,q,r\},s) \in \binom{P}{3} \times \{+,-\}} |P \cap h^s_{pqr}| \cdot \Pr[\text{Die Facette } (\{p,q,r\},s) \text{ wird im Laufe der RIK erzeugt}] \\ &= \sum_{k=1}^{n-4} \sum_{X \in L_k} k \cdot \Pr[\text{Die Facette } X \text{ wird im Laufe der RIK erzeugt}],\end{aligned}$$

wobei L_k die Menge der k-Facetten für P ist (siehe oben). Da eine k-Facette $X = (\{p,q,r\},s)$ genau dann erzeugt wird, wenn in der zufälligen Permutation die Punkte p, q, r vor den k Punkten in $P \cap h^s_{pqr}$ erscheinen, gilt

$$\Pr[\text{Die Facette } X \text{ wird im Laufe der RIK erzeugt}] = \frac{3!k!}{(k+3)!} = \frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Folglich

$$\mathbf{E}_\sigma[\Theta] = \sum_{k=1}^{n-4} \sum_{X \in L_k} \frac{6k}{(k+1)(k+2)(k+3)} \leq \sum_{k=1}^{n-4} \frac{6|L_k|}{k^2}.$$

Nun verwenden wir denselben Trick wie in der Ebene. Es gilt $|L_k| = |L_{\leq k}| - |L_{\leq (k-1)}|$, wobei $L_{\leq k}$ die Menge aller ℓ-Facetten von P für $0 \leq \ell \leq k$ bezeichnet. Mit Abelscher partieller Summation folgt nun:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\sigma[\Theta] &\leq \sum_{k=1}^{n-4} \frac{6}{k^2}\Big(|L_{\leq k}| - |L_{\leq (k-1)}|\Big) \\ &= \frac{6}{(n-3)^2}|L_{\leq (n-4)}| - 6|L_{\leq 0}| + \sum_{k=1}^{n-4} |L_{\leq k}| \Big(\frac{6}{k^2} - \frac{6}{(k+1)^2}\Big) \leq O(n) + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{18|L_{\leq k}|}{k^3},\end{aligned}$$

denn $|L_{\leq (n-4)}| = O(n^3)$, $|L_{\leq 0}| = O(n)$ und

$$\frac{6}{k^2} - \frac{6}{(k+1)^2} = \frac{12k+6}{k^2(k+1)^2} \leq \frac{18}{k^3}.$$

Der Satz von Clarkson besagt, dass $|L_{\leq k}| = O(nk^2)$, also

$$\mathbf{E}_\sigma[\Theta] = O\Big(\sum_{k=1}^{n-4} \frac{nk^2}{k^3}\Big) = O\Big(n \cdot \sum_{k=1}^{n-4} \frac{1}{k}\Big) = O(n \log n).$$

Der erwartete Aufwand für die Konfliktänderung, und folglich die erwartete Gesamtlaufzeit für die randomisiert inkrementelle Konstruktion der konvexen Hülle im Raum, ist $O(n \log n)$.