§ 20 Linearformen ; Dualräume und andere Homomorphismenräume

M ↓ Statt das Gleichungssystem

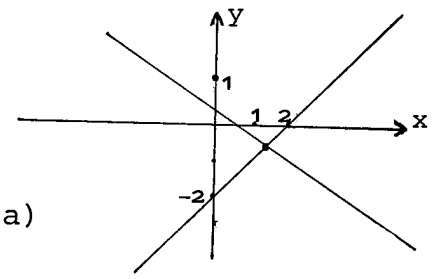
$$(*)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases}$$

als Ganzes zu betrachten, kann man sich zunächst auch auf die einzelnen Gleichungen

$$(G_i):\ \alpha_{i1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i \qquad (i=1,\ldots,m)$$

beschränken: Jede Lösung von (*) ist auch Lösung von (G_i) für $i \in \{1,\ldots,m\}$, und ungekehrt ist der Lösungssraum $\mathbb{L}$ von (*) der Durchschnitt der Lösungsräume von (G_i) (für $i=1,\ldots,m$).

<u>Beispiel</u> $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$



$\mathbb{L} = \{(x, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(Schnittpunkt zweier Geraden) (vgl. Bsp. a) aus (1.3))

Betrachten wir also im Folgenden eine <u>lineare Gleichung</u> der Form

$$(G)\quad \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n = \beta$$

über K; s. auch 13.7.

<u>Lösbarkeit</u>: (G) ist lösbar g.d.w. $\beta \in \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ gilt.

Ist $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq (0,\ldots,0)$, so ist also (G) stets lösbar.

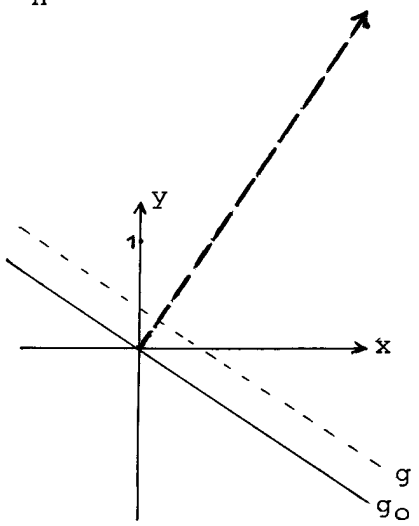
Wir setzen im folgenden $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq (0,\ldots,0)$ voraus.

Struktur des Lösungsraumes

Wieder setzt sich dieser zusammen aus einer Partikulärlösung und dem Lösungsraum der homogenen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = 0 \quad ,$$

ist damit eine LM der Dimension $n - rg(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n - 1$, also eine Hyperebene.



Bsp.: Der Lösungsraum g von $2x + 3y = 1$ ist (in $\mathbb{R}^2$) eine Gerade; diese ist parallel zu der Geraden g_o der Gleichung

$$2x + 3y = 0.$$

Mit Hilfe des kanonischen Skalarprodukts läßt sich $2x + 3y = 0$ auch in der Form $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$ schreiben. g_o besteht also aus allen Punkten, deren Ortsvektor auf $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ senkrecht steht.

Ohne Verwendung des Skalarprodukts kann man vorgehen, wenn man die Abbildung

$$f_{(2,3)} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \to 2x + 3y \end{cases} \qquad \text{benutzt: } g_o = \text{Kern } f_{(2,3)}$$

Im folgenden betrachten wir u.a. Abbildungen der Form

$$\begin{cases} K^n \longrightarrow K \\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \end{cases}$$

Zu dem System (*) von m linearen Gleichungen gehören m Abbildungen $f_1, \ldots, f_m$ dieser Art. Der Durchschnitt der Kerne von f_i ist dann gerade der Lösungsraum des zu (*) gehörenden homogenen Systems.

↑ M

Generalvoraussetzung: K Körper, V K-VR.

(20.1) Definition (Wdh. v. 13.6)

Jede lineare Abbildung $f : V \longrightarrow K$ heißt Linearform (lineares Funktional, LF).

Linearformen sind also lineare Abbildungen von V in den Körper K (aufgefaßt als 1-dim K-VR). Manchmal schreibt man statt $f(v)$ für $v \in V$ auch $\langle f,v\rangle$ und hat dann die Regeln

$$\langle f,v_1+v_2\rangle = \langle f,v_1\rangle + \langle f,v_2\rangle$$
$$\langle f,v\lambda\rangle = \langle f,v\rangle\lambda$$

Beispiele von Linearformen

(a) $V = K^n$, $k \in \{1,\dots,n\}$

$$pr_k : \begin{cases} K^n \longrightarrow K \\ (\xi_1,\dots,\xi_n) \mapsto \xi_k \end{cases} \text{ ist LF (vgl. (10.2.a))}$$

(b) $V = K^n$, $a = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$$f_a : \begin{cases} V \longrightarrow K \\ (\xi_1,\dots,\xi_n) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\xi_j \end{cases} \text{ (vgl. die Vorbemerkungen !)}$$

M f_a entspricht der Bildung des "Skalarprodukts" mit einem
M festen Vektor a.[1)]

Beispiele aus der Analysis:

(c) Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, der VR der Polynomabbildungen; seien ferner $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Für $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ existiert dann

$$J(f) := \int_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

Die Abbildung

$$J : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto J(f) \end{cases} \text{ ist dann LF; es gilt ja}$$

---

1) Wir sehen hier erneut, dass die Anwendung einer Linearform eine Verallgemeinerung der Bildung des Skalarprodukts (s. Kap. VII) mit einem festen Vektor ist.

$$J(f+g) = \int_\alpha^\beta (f(t)+g(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = J(f)+J(g) \quad \text{und}$$

$$J(f\cdot\lambda) = \int_\alpha^\beta f(t)\lambda\ dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt\cdot\lambda = J(f)\cdot\lambda.$$

(d) Die Abb. $\lim\limits_{n\to\infty}$ aus (10.46) ist ebenfalls eine LF.

<u>(20.2) Satz</u> (Existenz und „Eindeutigkeit" von Linearformen)

> Sei $B = \{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jeder Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ aus K genau eine LF f mit
>
> $$f(b_i) = \lambda_i \text{ für alle } i \in I.$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes von der linearen Fortsetzung (s. LAI).

M ↓ Jede LF ist also durch eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von Elementen aus K charakterisiert, also durch ein Element von K^I mit $|I|=|B|$. Bekanntlich (vgl. § 6) läßt sich K^I eine VR-Struktur aufprägen. Es trägt auch die Menge der LF'en nach geeigneter Definition von Addition und S-Multiplikation Vektorraum-Struktur. Wdh.:

Zwischen Abbildungen, deren Wertebereich eine Gruppen- oder VR-Struktur trägt, haben wir schon öfters eine Addition erklärt:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

bzw. eine S-Mulitplikation eingeführt:

$$(\lambda\cdot f)(x) := \lambda\cdot f(x)$$

Diese Operationen entsprechen denjenigen auf den Elementen von K^I:

Gilt $f(b_i) = \lambda_i$ und $g(b_i) = \mu_i$, so ist

$$(f+g)(b_i) = f(b_i) + g(b_i) = \lambda_i + \mu_i \quad \text{und}$$

$$(\lambda f)(b_i) = \lambda f(b_i) = \lambda \cdot \lambda_i \text{ (für alle } i \in I)$$

↑ Wir gehen noch etwas allgemeiner vor und betrachten Homomor-
M phismen eines VR's in einen anderen.

<u>(20.3) Definition</u> (Wdh. v. 13.1)

Seien V und W VR'e über dem Körper K.

(a) $\boxed{\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{f \mid f \text{ ist VR-Homomorphismus von } V \text{ in } W\}}$

(b) Zu $f,g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\lambda \in K$ definieren wir

$$f+g : \begin{cases} V \longrightarrow W \\ v \longmapsto f(v) + g(v) \end{cases}$$

$$\lambda \mathop{\circ}_K f : \begin{cases} V \longrightarrow W \\ v \longmapsto \lambda \cdot f(v) \; (\; = f(v) \cdot \lambda) \end{cases}$$

<u>(20.4) Satz</u> (vgl. 13.1)

Ist K Körper und sind V und W K-VR'e, so gilt

$$\boxed{(\mathrm{Hom}_K(V,W), +, \mathop{\cdot}_K) \text{ ist K-Vektorraum}}$$

<u>Beweis-Andeutung</u>: Der Beweis wird geführt durch Nachprüfen der VR-Eigenschaften. U.a. sieht man, daß

$$\mathcal{O} : \begin{cases} V \longrightarrow W \\ v \longmapsto \mathcal{O}_W \end{cases} \quad \text{neutrales Element der Addition}$$

$$-f : \begin{cases} V \longrightarrow W \\ v \longmapsto -f(v) \end{cases} \quad \text{additive Inverse zu } f \in \mathrm{Hom}_K(V,W) \text{ ist.}$$

□

Anmerkung:

Ist $W = K$ ein Schiefkörper und V ein rechter K-Vektorraum, so wird durch die Definition

$$\lambda f : V \longrightarrow K$$
$$v \longmapsto \lambda \cdot f(v) \quad (\underset{\text{i.a.}}{\neq} \quad f(v) \cdot \lambda) \quad \text{(Multiplikation in } K)$$

und durch obige Addition $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ ein linker K-Vektorraum.

Wir interesieren uns für folgenden Spezialfall:

(20.5)(a) Bezeichnung:

Ist V ein K-VR, so heißt der VR

$\boxed{V^* := (\mathrm{Hom}_K(V,K), +, \cdot_K)}$ der (algebraische) Dualraum von V.

Nun können wir den Zusammenhang zwischen Linearformen und Elementen von K^I präzisieren:

(20.5)(b) Satz

Sei V K-VR und $B = \{b_i \mid i \in I\}$ Basis von V, also $V \cong K^{(I)}$.

Dann gilt:

$$\boxed{V^* \cong K^I}$$

Beweis

Wir betrachten $\varphi : \begin{cases} V^* \longrightarrow K^I \\ f \longmapsto (f(b_i))_{i \in I} \end{cases}$

φ ist nach (13.2) eine Bijektion. Für alle $f, g \in V^*$, $\lambda \in K$ gilt:

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(b_i))_{i \in I} = (f(b_i) + g(b_i))_{i \in I} = (f(b_i))_{i \in I} + (g(b_i))_{i \in I} = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\varphi(\lambda f) = ((\lambda f)(b_i))_{i \in I} = (\lambda \cdot f(b_i))_{i \in I} = \lambda (f(b_i))_{i \in I} = \lambda \varphi(f). \qquad \square$$

(20.6) Korollar

$$\boxed{\text{Ist } V \text{ endlich-dimensionaler } K\text{-VR, so gilt } \underline{\dim_K V = \dim_K V^*}}$$

(20.7) Satz

Ist V endl.-dim K-VR mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, so bilden die durch

$$b_i^*(b_j) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

definierten Linearformen b_i^* (die zu b_i bzgl. B dualen LF'en) mit $i=1,\ldots,n$ eine Basis B^* von V^*.

Sie heißt die zu B duale Basis von V^*

Für $f \in V^*$ gilt $f = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i^*$.

Anmerkung: Im unendlich-dim. Fall ist B^* definiert, l.u., aber keine Basis mehr, da sich z.B. die durch

$$f(b_i) = 1 \quad \text{für alle } i \in I$$

definierte LF f nicht als (endl.) LK von B^* darstellen läßt.

Beweis von 20.7:

(i) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i^* = \Theta \Rightarrow \mu_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i^*(b_j) = (\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i^*)(b_j) = 0$ für $j=1,\ldots,n$

(ii) $[\sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i^*](\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i^*(\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i)(\sum_{j=1}^{n} b_i^*(b_j)\xi_j)$

$$\underset{\substack{\text{Def} \\ b_i^*}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(b_i)\xi_i \underset{f \text{ LF}}{=} f(\sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i) \quad \text{für alle } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n.$$

Wegen Übereinstimmung der Definitions- und Wertebereiche folgt $\sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i^* = f$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt, dass B^* Basis von V^* ist. □

Beispiel: (1) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$;

e_1^* ist bestimmt durch $\begin{cases} e_1 \mapsto 1 \\ e_2 \mapsto 0 \\ e_3 \mapsto 0 \end{cases}$; denn daraus ergibt sich

durch lineare Fortsetzung

$$e_1^*((\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = e_1^*(\sum_{i=1}^{3} e_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{3} e_1^*(e_i)\cdot\xi_i = \xi_1 .$$

Also ist e_1^* die 1-te Projektion. Analog ist $e_2^* = pr_2$, $e_3^* = pr_3$.

Die zur Matrix $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ gehörende Linearform

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \longmapsto \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\xi_i \end{cases}$$

läßt sich darstellen durch $f = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i^* = \sum_{i=1}^{3} f(e_i)e_i^*$

(2) Seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten

$V^* := \{f \mid f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ linear}\}$.

Nach dem Fortsetzungssatz gibt es zu jedem Paar $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau eine lineare Abbildung

$$f := f_{(\lambda,\mu)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } f(1,0) = \lambda \text{ und } f(0,1) = \mu,$$

nämlich die Abbildung

$$f_{(\lambda,\mu)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } f_{(\lambda,\mu)}(\xi_1,\xi_2) = \lambda\xi_1 + \mu\xi_2,$$

deren Matrix bzgl. $((1,0),(0,1))$ gerade (λ,μ) ist. (Und jedes $f \in V^*$ hat eine solche Darstellung.)

Speziell erhält man

$$(1,0)^* = f_{(1,0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } f_{(1,0)}(\xi_1,\xi_2) = \xi_1 = pr_1(\xi_1,\xi_2)$$

und

$$(0,1)^* = f_{(0,1)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_{(0,1)}(\xi_1,\xi_2) = \xi_2 = pr_2(\xi_1,\xi_2)$$

und damit

$$\begin{aligned} f_{(\lambda,\mu)}(\xi_1,\xi_2) &= \lambda\, f_{(1,0)}(\xi_1,\xi_2) + \mu\, f_{(0,1)}(\xi_1,\xi_2) \\ &= [\lambda\, f_{(1,0)} + \mu\, f_{(0,1)}](\xi_1,\xi_2) \end{aligned}$$

für alle $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}$. Es folgt $f_{(\lambda,\mu)} = \lambda\, f_{(1,0)} + \mu\, f_{(0,1)}$. Wegen $\dim_K V^* = \dim_K V$ ist $(V^*,+,\cdot_K)$ 2-dim $\mathbb{R}$-VR mit der zu $((1,0),(0,1))$ dualen Basis $(f_{(1,0)},f_{(0,1)})$.

Anlaß zur Betrachtung der Linearformen war die Untersuchung der Lösungsmenge einer (homogenen) linearen Gleichung. Diese führt zu

(20.8) Definition

(a) Sei $f \in V^*$ und $v \in V$.

f und v heißen orthogonal zueinander g.d.w. $f(v) = 0$.

(in anderer Schreibweise: $\langle f,v\rangle = 0$) gilt.

(b) Sei $A \subseteq V$.

$A^\perp := \{f \in V^* \mid f(a) = 0 \text{ für alle } a \in A\}$ heißt der zu A orthogonale Raum von V^*. (Manchmal auch mit A° bezeichnet).

(c) Sei $F \subseteq V^*$.

$F_\perp := \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$ heißt der zu F orthogonale Raum von V.

(Anm.: $F_\perp \subseteq V$; auch $F^\perp$ ist definiert, aber es gilt $F^\perp \subseteq (V^*)^*$).

Fortsetzung des Beispiels (2):

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und V^* wie oben definiert; sei ferner $A = \{(0,1)\}$.

Dann ist

$$A^\perp = \{f \in V^* \mid f((0,1)) = 0\} = \{f_{(\lambda,\mu)} \mid f_{(\lambda,\mu)}((0,1)) = 0 \wedge \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\lambda f_{(1,0)} + \mu f_{(0,1)} \mid \mu = 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} f_{(1,0)} \quad \text{und}$$

$$(\mathbb{R} f_{(1,0)})_\perp = \{x \in V \mid \lambda f_{(1,0)}(x) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{(1,0)}(\xi_1,\xi_2) = 0\}$$

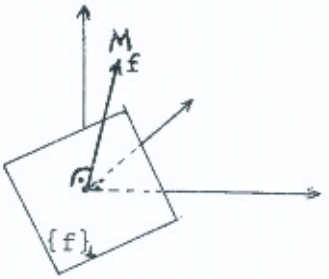
$$= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 = 0\} = (0,1)\mathbb{R} = \langle A\rangle .$$

Anmerkung

(1) Identifizieren wir die zur LF $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \longmapsto \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \xi_i \end{cases}$

gehörende Matrix $M_f = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit dem ensprechenden Vektor aus $\mathbb{R}^3$, so gilt:

f und v sind genau dann orthogonal, wenn M_f und v im elementargeometrischen Sinne orthogonal sind.



(2) Zu einem homogenen linearen Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten (über K) gehören m LF'en $f_1, \ldots, f_m$. Der Lösungraum ist dann

$$L_o = \{f_1, \ldots, f_m\}_\perp \subseteq K^n.$$

<u>(20.9) Satz</u>

Sei V ein K-VR. Dann gilt

(1)	$A \subseteq V \Rightarrow A^\perp$ UR von V^*
(2)	$F \subseteq V^* \Rightarrow F_\perp$ UR von V

<u>Beweis</u> : (1) $0 \in A^\perp$

$f, g \in A^\perp \Rightarrow \forall a \in A : f(a) = 0 = g(a) \Rightarrow$

$\forall a \in A : (f+g)(a) = f(a) + g(a) = 0 \Rightarrow f + g \in A^\perp$.

$f \in A^\perp \wedge \lambda \in K \Longrightarrow \forall a \in A : (\lambda f)(a) = \lambda \cdot f(a) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda f \in A^\perp$.

(2) $F_\perp = \bigcap_{f \in F} \text{Kern } f$ UR. □

(20.10) Satz

Seien V endl.-dim K-VR und U ein UR von V mit Basis $\{u_1,\dots,u_k\}$. Ist dann $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{n-k}\}$ Basis von V, so ist $\{v_1^*,\dots,v_{n-k}^*\}$ Basis von $U^\perp$. Insbesondere gilt:

$$\boxed{\dim_K U^\perp = \operatorname{codim}_V U}$$

Beweis:

(1) $\{u_1^*,\dots,u_k^*,v_1^*,\dots,v_{n-k}^*\}$ ist duale Basis (vgl. 20.7)).

(2) Definitionsgemäß ist $v_i^*(u_j) = 0$ (für $i=1,\dots,n-k; j=1,\dots,k$)
Wegen der Linearität von v_i^* ist $v_i^* \in U^\perp$.

(3) $f \in U^\perp \Rightarrow f(u_i) = 0$ für $i \in \{1,\dots,k\} \Rightarrow$
$$f \underset{(14.7)}{=} \sum_{i=1}^{k} f(u_i)u_i^* + \sum_{i=1}^{n-k} f(v_i)v_i^* = \sum_{i=1}^{n-k} f(v_i)v_i^* \in \langle v_1^*,\dots,v_{n-k}^*\rangle .$$

(4) Aus (2) und (3) folgt $U^\perp = \langle v_1^*,\dots,v_{n-k}^*\rangle$, aus (1) die lineare Unabhängigkeit von $v_1^*,\dots,v_{n-k}^*$. □

Anmerkung: Es läßt sich zeigen (s. Guber I p.92), daß sogar gilt:
Ist U UR des K-VR'es V, so ist $U^\perp \cong (V/U)^*$.
Hieraus folgt $\operatorname{codim}_V U < \infty \Rightarrow \dim U^\perp = \operatorname{codim}_V U$ (ohne Beschränkung der dim von V).

(20.11) Satz

Sei V endl.-dim. K-VR und U UR von V. Dann gilt
$$(U^\perp)_\perp = U$$

Beweis

(a) $U \subseteq (U^\perp)_\perp$:

Für $u \in U$ und $f \in U^\perp$ gilt $f(u) = 0$, also $u \in \{f\}_\perp$.

(b) Sei $a \notin U$; setzen wir in (20.10) o.B.d.A. $v_1 = a$, so folgt $a^* \in U^\perp$.

Definitionsgemäß gilt $a^*(a) = 1$, also ist a nicht orthogonal zu a^*, einem Element von $U^\perp$; daher $a \notin (U^\perp)_\perp$. □

<u>Beispiel</u>: Für $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$ gilt:
$[((0,1)\mathbb{R})^\perp]_\perp = [\mathbb{R}f_{(1,0)}]_\perp = (0,1)\mathbb{R}$ (vgl. auch das Beispiel nach 20.8).

Wie wir sahen, entspricht einem homogenen linearen Gleichungssystem eine TM W von V^*; sein Lösungsraum ist dann der UR $W_\perp \subseteq V$. Umgekehrt gilt:

<u>(20.12) Satz</u>

(i) Ist U UR des endl.-dim K-VR's V mit $\operatorname{codim}_V U = m$, so existieren m l.u. Linearformen $g_1, \ldots, g_m \in V^*$ mit

$$U = \{g_1, \ldots, g_m\}_\perp .$$

(ii) <u>Jede LM (jeder affine UR) eines endl.-dim. VR's lässt sich (nach Auswahl eines Koordinatensystems) durch ein lineares Gleichungssystem darstellen.</u>

Bew.: (i) Nach (20.9) und (20.10) ist $U^\perp$ ein UR von V^* mit $\dim_K U^\perp = \operatorname{codim}_V U = m$.

In $U^\perp$ gibt es also m l.u. Linearformen $g_1, \ldots, g_m$; mit diesen gilt $U \underset{(20.11)}{=} (U^\perp)_\perp = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle_\perp = \{g_1, \ldots, g_m\}_\perp$.

(ii) Ist $L = a + U$, so existieren nach (i) LF'en $g_1, \ldots, g_m$ mit $U = \{g_1, \ldots, g_m\}_\perp$. U ist also Lösungsraum des Systems

$$(*) \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x) = 0. \end{cases}$$

Nach Auswahl einer Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V erhalten wir mit

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B \qquad \text{(vgl. 7.6)}$$

$g_i(x) = g_i(\sum_{j=1}^{n} v_j \xi_j) = \sum_{j=1}^{n} g_i(v_j)\xi_j$. Setzen wir $\alpha_{ij} := g_i(v_j)$, so erfüllen wegen (*) genau die Koordinatenvektoren von Elementen von U das Gleichungssytem

$$(*') \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = 0 \quad (i=1,\ldots,m).$$

Mit $\beta_i := g_i(a)$ folgt für die Koordinatenvektoren von Elementen von L

$$(*) \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i & (i=1,\ldots,m) \end{cases}$$

□

<u>Anmerkung</u>: <u>Jedes Element von</u> $AG(K^n)$ <u>läßt sich also durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben</u>. Umgekehrt ist der Lösungsraum eines LGS's in n Unbekannten als Element von $AG(K^n) \cup \{\emptyset\}$ auffassbar. Dies zeigt die enge Verbindung zwischen linearen Gleichungssystemen und affinen Unterräumen in der Geometrie.

<u>Beispiel</u>:

Seien $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $L = (\alpha_1,\alpha_2) + (\mu_1,\mu_2)\mathbb{R}$ LM in V mit $(\mu_1,\mu_2) \neq (0,0)$. (beliebige Gerade)!

Gesucht ist eine LF, die (μ_1,μ_2) auf 0 abbildet; $f_{(\mu_2,-\mu_1)}$ ist eine solche; aus Dimensionsgründen folgt $\{f_{(\mu_2,-\mu_1)}\}_\perp = (\mu_1,\mu_2)\mathbb{R}$.

Es ist also $(\mu_1,\mu_2)\mathbb{R}$ Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$\mu_2\xi_1 - \mu_1\xi_2 = 0$$

und L Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$\mu_2\xi_1 - \mu_1\xi_2 = \mu_2\alpha_1 - \mu_1\alpha_2 \quad .$$

Ist $(\mu_1,\mu_2) = (1,m)$ und $(\alpha_1,\alpha_2) = (0,b)$, setzt man ferner $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, so folgt die bekannte Geradengleichung $y = mx + b$. Mit $(\mu_1,\mu_2) = (0,1)$ ergibt sich $x = \alpha_1$ (= const.).

Anhang

Da $V^* = (\mathrm{Hom}_K(V,K),+,\cdot_K)$ ebenfalls VR ist, kann man auch den Dualraum von V^* bilden:

(20.13) Definition

Ist V K-VR, so heißt $V^{**} := (V^*)^*$ der Bidualraum von V.

Die Elemente von V^{**} sind also lineare Abbildung von V^* in K.

Beispiel: Sei $v_0 \in V$ fest gewählt.

$$\bar{v}_0 : \begin{cases} V^* \to K \\ f \mapsto f(v_0) \end{cases} \quad \text{ist dann in } V^{**}:$$

$\bar{v}_0(f+g) = (f+g)(v_0) = f(v_0) + g(v_0) = \bar{v}_0(f) + \bar{v}_0(g)$

$\bar{v}_0(\lambda f) = (\lambda f)(v_0) = \lambda \cdot f(v_0) = \lambda \bar{v}_0(f)$.

(20.14) Satz

> Ist V K-VR, so ist die Abbildung $j : \begin{cases} V \longrightarrow V^{**} \\ v \longmapsto \bar{v} \end{cases}$ injektiv und linear (also ein Monomorphismus).

Beweis

(a) $[j(v+w)](f) = \overline{v+w}\,(f) = f(v+w) \underset{f \in V^*}{=} f(v) + f(w) = \bar{v}(f) + \bar{w}(f)$

$= [j(v)](f) + [j(w)](f) = [j(v) + j(w)](f)$ für alle $f \in V^*$.

$\Rightarrow j(v+w) = j(v) + j(w)$;

$[j(v\lambda)](f) = \overline{v\lambda}(f) = f(v\lambda) = f(v)\lambda = [j(v)](f)\cdot\lambda = [j(v)\cdot\lambda](f)$

für alle $f \in V^* \Rightarrow j(v\lambda) = j(v)\cdot\lambda$

j ist also linear.

(b) Um zu zeigen, daß j injektiv ist, betrachten wir Kern j.

Sei $v \in V$ mit $j(v) = \mathfrak{O}$; dann gilt

$\bar{v}\,(f) = f(v) = 0$ für alle $f \in V^*$.

Wäre $v \neq 0$, so existierte eine Basis, die v enthält; v^* wäre dann LF und $v^*(v) \neq 0$. Widerspruch. □

(20.15) Korollar

> Ist V endl.-dim K-VR, so gilt $V \cong V^{**}$

Anmerkung: Die Beschränkung auf endl.-dim VR'e ist nötig.

<u>Beweis</u> von (20.15)

Da V als endlich-dim vorausgesetzt ist, können wir (14.6) anwenden:

$$\dim_K V = \dim_K V^* = \dim_K V^{**}. \qquad \square$$

<u>Anmerkung</u>:

Ist V endl.-dim. so ist V auch zu V^* isomorph. Die Abbildung φ aus dem Beweis zu (20.5) ist aber von der Basis B abhängig.

Im Gegensatz dazu ist der Isomorphismus $j : V \longrightarrow V^{**}$ nicht von der Basis abhängig.

Im endl.-dim Fall können wir daher <u>V mit V^{**} identifizieren</u>, d.h. jedes $v \in V$ auch als Element von V^{**} (und umgekehrt) ansehen; wir schreiben also

$$v(f) = f(v).$$

Es ist dann V der Dualraum von V^* und es gilt $F^{\perp} = F_{\perp}$ für jede TM F von V^*.