§ 21 Rang von Matrizen, elementare Umformungen von Matrizen (Wdhlg. & Fortsetzung)

M ↓ Für die zu einem LGS gehörende lineare Abbildung f_A zeigten wir in (11.3) die Gleichung

$$\operatorname{rg} f_A = \operatorname{rg} A.$$

↑ M Analog läßt sich bei jeder linearen Abbildung zwischen endlich-dim. VR'en der Rang an einer zugehörigen Matrix ablesen: Ist $f \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$ und sind $B = (b_1,\dots,b_n)$ und C geordnete Basen von V bzw. W, so gilt mit $A := M_C^B(f)$ und $\mathfrak{n}_j = (\delta_{jk})_{k=1,\dots,n} = M_B(b_j)$ für $j \in \{1,\dots,n\}$:

$$\operatorname{rg} f = \dim f(V) = \dim f(\langle b_1,\dots,b_n\rangle) = \dim(\langle f(b_1),\dots,f(b_n)\rangle) =$$

$$\dim(\langle f(b_1)_{(C)},\dots,f(b_n)_{(C)}\rangle) = \dim_K(\langle A\mathfrak{n}_1,\dots,A\mathfrak{n}_n\rangle)$$

Dabei ist

$$f(b_j)_{(C)} = A\mathfrak{n}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

(1 an j-ter Stelle)

Es gilt also:

(21.1) Satz (Wdhlg.)

Seien V,W endl.-dim. K-VR'e mit geordneten Basen B bzw. C, sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$; dann gilt (vgl. 13.3):

(a) Die "Spalten" $\mathfrak{a}_{\bullet j} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ der Matrix $(\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\} \\ j\in\{1,\dots,n\}}} := M_C^B(f)$ sind die Koordinatenvektoren (bzgl. C) der Bilder der Basisvektoren b_j aus B $(j = 1,\dots,n)$.

(b) $\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M_C^B(f)}$

<u>Anmerkung</u>: Ist $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in K^{(m,n)}$, so bezeichnen wie - wie bisher schon z. T. geschehen - die Matrix

$$\mathfrak{a}_{\bullet j} := (\alpha_{ij})_{i\in\{1,\dots,m\}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \in K^{(m,1)}$$ als <u>j-te Spalte von A</u>.

Manchmal schreiben wir dann $A = (\mathfrak{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathfrak{a}_{\bullet n})$. Insbesondere gilt $A = (A\mathfrak{n}_1, \dots, A\mathfrak{n}_n)$.

Analog heißt $\mathfrak{a}_{i\bullet} := (\alpha_{ij})_{j\in\{1,\dots,n\}} = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \in K^{(1,n)}$ <u>i-te Zeile von A</u>; wir fassen sie oft als Element von K^n auf (wobei wir dann K^n und $K^{(1,n)}$ identifizieren).[1)]

Ähnlich wie der Spaltenrang einer Matrix läßt sich der Zeilenrang definieren:

<u>(21.2) Definition</u>

Ist $A = (\alpha_{ij}) \in K^{(m,n)}$, so definieren wir $\langle \mathfrak{a}_{1\bullet}, \dots, \mathfrak{a}_{m\bullet} \rangle \subseteq K^{(1,n)}$ als den <u>Zeilenraum von A</u> und $rg_z A := \dim_K \langle \mathfrak{a}_{1\bullet}, \dots, \mathfrak{a}_{m\bullet} \rangle$ als den <u>Zeilenrang von A</u>.

<u>Beispiel</u>:

(i) Sei $K = \mathbb{R}$; $rg_z \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, da $(2,3,-1)$ und $(1,1,1)$ l.u. sind. Ferner gilt $rg \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ (vgl. Bsp. nach (11.3)).

(ii) Eine quadratische Matrix $(\alpha_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$, deren Einträge außerhalb der <u>Hauptdiagonalen</u> $(\alpha_{ii})_{i\in\{1,\dots,n\}}$ gleich 0 sind, heißt <u>Diagonalmatrix</u>; eine Diagonalmatrix hat also die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

1) Oft schreibt man auch für $K^{(n,1)}$ nur K^n, falls keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Spezialfall: $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ <u>"Einheitsmatrix"</u>

(Anmerkung: $E_n \cdot A = A \cdot E_n = A$ für alle $A \in K^{(n,n)}$).

$$rg_z \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = |\{i \mid \alpha_{ii} \neq 0\}| = rg \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>(21.3) Satz</u>

Ist K (kommutativer) Körper, sind $m,n \in \mathbb{N}$, so gilt für alle $A \in K^{(m,n)}$:

$$rg_z A = rg\ A$$

Wegen der $\boxed{\text{Gleichheit von Zeilen- und Spaltenrang}}$ sprechen wir auch beim Zeilenrang als dem

<u>Rang von A</u>.

<u>Beweis:</u> Sei $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$ mit Zeilen $\mathfrak{a}_{1\cdot},\dots,\mathfrak{a}_{m\cdot}$. Für $i \in \{1,\dots,m\}$ definieren wir

$$f_i : K^{(n,1)} \longmapsto K \text{ durch } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \longmapsto (\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix};$$

f_i ist Linearform; bzgl. der geordneten kanonischen Basen B und C von $K^{(n,1)}$ bzw. K hat f_i die Matrix

$$M_C^B(f_i) = \mathfrak{a}_{i\cdot}$$

Es gilt (vgl. 20.5b):

$$U^* := \langle f_1,\dots,f_m \rangle \cong \langle \mathfrak{a}_{1\cdot},\dots,\mathfrak{a}_{m\cdot} \rangle \text{ (Zeilenraum von A)},$$

also

(i) $\underline{\dim U^* = rg_z(A)}$

Andererseits gilt für

$$f : K^{(n,1)} \longrightarrow K^{(m,1)} \quad \text{mit } \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto A\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\xi_j \end{pmatrix}$$

die Aussage $\mathfrak{x} \in \text{Kern } f \Leftrightarrow A\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} f_1(\mathfrak{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathfrak{x}) \end{pmatrix} = \mathfrak{o} \Leftrightarrow \mathfrak{x} \in (U^*)_\perp$,

somit

(ii) $\underline{(U^*)_\perp = \text{Kern } f}$

Beachtet man, daß $V = K^{(n,1)}$ und damit V^* endlichdimensional ist, so ergibt sich aus (i) und (ii) folgendes:

$$rg\ A \underset{M(f)=A}{=} rg\ f \underset{(18.7)}{=} n - \dim_K(\text{Kern } f) \underset{(18.2)}{=} \text{codim}_{K^{(n,1)}}(\text{Kern } f)$$

$$\underset{(ii)}{=} \text{codim}_{K^{(n,1)}}(U^*_\perp) \underset{(20.10)}{=} \dim_K (U^*_\perp)^\perp \underset{\text{Übungsaufgabe}}{=} \dim U^* \text{ (s. Fußnote)}$$

$$\underset{(i)}{=} rg_z(A) \quad \square$$

Anm.: Eine alternative Beweismöglichkeit eröffnen spätere Sätze (s. u.):

$rg_{sp} A = r \Rightarrow \exists S, R$ regulär : $SAR = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\exists S^T, R^T$ regulär : $R^T A^T S^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$rg_z A = rg\, A^T = rg\, A$.

Wir lernen nun ein Verfahren kennen, das es gestattet, den Rang einer Matrix verhältnismäßig einfach zu bestimmen.

Dazu beachten wir, daß sich der Zeilenraum $\langle \mathfrak{a}_{1\cdot}, \ldots, \mathfrak{a}_{m\cdot} \rangle$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{m\cdot} \end{pmatrix}$ <u>nicht</u> ändert, wenn wir $\mathfrak{a}_{i\cdot}$ mit $\mathfrak{a}_{j\cdot}$ vertauschen, $\mathfrak{a}_{i\cdot}$ durch $\mathfrak{a}_{i\cdot} \cdot \lambda$ (mit $\lambda \in K - \{0\}$) oder $\mathfrak{a}_{i\cdot}$ durch $\mathfrak{a}'_{i\cdot} = \mathfrak{a}_{i\cdot} + \mathfrak{a}_{j\cdot} \cdot \lambda$ (mit $i \neq j$) ersetzen.

Diese Operationen entsprechen gerade den elementaren Zeilenumformungen gemäß (11.6).

Durch Rückgriff auf $V \cong V^{**}$ und Anm. zu 20.15 erhält man im Endl. Dim.: $(\mathfrak{U}^*_\perp)^\perp \cong (\mathfrak{U}^{*\perp})_\perp \cong \mathfrak{U}^*$.

(21.4) Hilfssatz

Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen, so gilt

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$$

Nach Satz 10.10 läßt sich jede $(m \times n)$-Matrix A über K durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix B von Zeilenstufenform überführen. Deren Rang ist leicht zu bestimmen:

(21.5) Satz

(a) Sei B eine $m \times n$-Matrix über K der (Zeilenstufen-) Form

$$B = \begin{pmatrix} b_{1j_1} & \cdots & & & \\ & & b_{2j_2} & \cdots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & b_{kj_k} & \cdots b_{kn} \end{pmatrix}$$

mit $b_{ij_i} \neq 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ und $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ (sowie $b_{ij} = 0$ für $j < j_i$ und $i \leq k$ oder für $k < i \leq m$), dann gilt

$$\operatorname{rg} B = k$$

(b) Ist A eine $(m \times n)$-Matrix über K, und lässt sich A durch endlich viele elemtare Zeilenumformungen in eine Matrix B der in (a) angegebenen Form überführen, so gilt

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = k$$

Beweis:

Durch wiederholte Anwendung von (21.4) folgt $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.
Wir zeigen, dass die ersten k Zeilen $b_{1\bullet}, \ldots, b_{k\bullet}$ von B l.u. sind; da die evtl. verbleibenden restlichen Zeilen 0 sind, folgt daraus die Behauptung.

Sei also $\sum_{i=1}^{k} \mathfrak{b}_{i\bullet}\lambda_i = \mathfrak{o}$; wegen $b_{1j_1} \neq 0$ und $b_{ij_1} = 0$ sonst ergibt sich $\lambda_1 = 0$. Analog folgt $\lambda_2 = 0$ aus $\sum_{i=2}^{k} \mathfrak{b}_{i\bullet}\lambda_i = \mathfrak{o}$.
Nach k Schritten erhält man schließlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$. □

(21.6) Anmerkung: Im Gegensatz zur Situation bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme (vgl. §11) kann man bei der Rangbestimmung einer Matrix auch (analog zu Zeilenumformungen definierte) elementare Spaltenumformungen anwenden; auch durch sie bleibt der Rang unverändert.

Beispiel (Voraussetzung: Char $K = 0$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\mathfrak{a}'_{\bullet 2} := \mathfrak{a}_{\bullet 2} - \mathfrak{a}_{\bullet 1} \qquad \mathfrak{a}'_{\bullet 3} =: \mathfrak{a}''_{\bullet 1}$$

$$\mathfrak{a}'_{\bullet 3} := \mathfrak{a}_{\bullet 3} - 3\mathfrak{a}_{\bullet 1} \qquad \mathfrak{a}'_{\bullet 4} + \mathfrak{a}'_{\bullet 2} =: \mathfrak{a}''_{\bullet 2}$$

$$\mathfrak{a}'_{\bullet 4} := \mathfrak{a}_{\bullet 4} - \mathfrak{a}_{\bullet 1} \qquad \mathfrak{a}'_{\bullet 4} =: \mathfrak{a}''_{\bullet 3}$$

$$\mathfrak{a}'_{\bullet 1} =: \mathfrak{a}''_{\bullet 4}$$

Ohne Umformung ergibt sich $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}_z A \leq 3$. Nach Umformung sieht man $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3$ nach (21.5).

Auch Mischung von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen sind zur Rangbestimmung erlaubt.