§ 22 Regularität von Matrizen, Inversebildung

M ↓

In diesem Paragraphen betrachten wir zu bijektiven VR-Homomorphismen gehörende Matrizen.

Sei also $f: V \longrightarrow W$ Isomorphismus des n-dim K-VR's V auf den K-VR W. Dann gilt

(i) $\dim_K W = \dim_K V = n$

(ii) $f(V) = W$ (Surjektivität)

(iii) $\exists\, f^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(W,V) : f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$.

Zeichnen wir in V bzw. W geordnete Basen B und C aus, so gilt für die darstellende Matrizen

(i') $M_f := M_C^B(f) \in K^{(n,n)}$ (M_f ist quadratische Matrix)

(ii') $\mathrm{rg}\, M_f = n$ (maximal möglicher Rang von M_f)

(iii') $\exists\, M^{-1} : M^{-1} \cdot M_f = E_n = M_f \cdot M^{-1}$ (M_f besitzt eine multiplikative Inverse)

Hierbei ergibt sich (iii') mit $M^{-1} := M_B^C(f^{-1})$ aus (iii) und (13.12):

$$M_B^C(f^{-1}) \cdot M_C^B(f) = M_B^B(\mathrm{id}_V) = E_n$$

$$M_C^B(f) \cdot M_B^C(f^{-1}) = M_C^C(\mathrm{id}_W) = E_n.$$

Sei umgekehrt $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und besitze $M_f = M_C^B(f)$ eine multiplikative Inverse M^{-1}. Wir definieren f^- als die zu M^{-1} gehörende lineare Abbildung.

Dann folgt nach (13.12)

$$M_B^B(f^- \circ f) = M_B^C(f^-) \cdot M_C^B(f) = M^{-1} \cdot M_f = E_n = M_B^B(\mathrm{id}_V)$$

und

$$M_C^C(f \circ f^-) = M_C^B(f) \cdot M_B^C(f^-) = M_f \cdot M^{-1} = E_n = M_C^C(\mathrm{id}_W).$$

f besitzt dann also die Inverse f^- und ist damit ein Isomorphismus. Eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen VR'en ist also genau dann ein Isomorphismus, wenn eine (und damit jede) darstellende Matrix eine multiplikative Inverse besitzt.

↑ M

(22.1) Definition

Seien K Körper und $A \in K^{(n,n)}$ (quadratische) Matrix. Dann heißt A regulär (invertierbar), falls gilt:

$$\exists A^{-1} \in K^{(n,n)} : A^{-1} \cdot A = E_n = A \cdot A^{-1}.$$

Anderenfalls heißt A singulär.

(22.2) Satz

Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und gilt $\dim_K V = \dim_K W = n < \infty$, sind ferner B und C beliebige geordnete Basen von V bzw. W, so gilt:

(i) f Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $M_C^B(f)$ regulär und

(ii) $M_B^C(f^{-1}) = [M_C^B(f)]^{-1}$ (in Falle der Existenz)

Beweis. s. o.

Ein Kriterium, das uns das Nachprüfen der Regularität einer Matrix ohne Konstruktion der Inversen gestattet, ist das folgende:

(22.3) Hilfssatz

Ist $A \in K^{(n,n)}$ (quadratische Matrix über dem Körper K), so gilt

A regulär $\Leftrightarrow$ rg $A = n$

Beweis: Wir betrachten $f_A : K^{(n,1)} \longrightarrow K^{(n,1)}$ mit $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

Für die kanonische geordnete Basis B gilt $M_B^B(f_A) = A$. Nun folgt

$$\mathrm{rg}\, A = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, f_A = n \Leftrightarrow f_A \text{ surjektiv} \underset{(13.8)}{\Leftrightarrow} f_A \text{ bijektiv}$$

$$\underset{(22.2)}{\Leftrightarrow} A \text{ regulär.} \qquad \square$$

(22.4) Verfahren zur Berechnung der Inversen

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{(n,n)}$ regulär. Dann existiert $A^{-1} = (\beta_{jk})_{j,k\in\{1,\dots,n\}}$.
Schreiben wir $A\cdot A^{-1} = E_n$ ausführlich, so erhalten wir

$$A\cdot A^{-1} = (\alpha_{ij})\cdot(\beta_{jk}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}\right)_{i,k\in\{1,\dots,n\}} = (\delta_{ik})_{i,k\in\{1,\dots,n\}}$$

Die k-te Spalte $\mathfrak{b}_{\bullet k} = \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{pmatrix}$ von A^{-1} ist also die (eindeutig bestimmte) Lösung des LGS's

$$A\mathfrak{x} = A\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Zeile} \qquad = \mathfrak{n}_k$$

Daraus ergibt sich folgendes Berechnungsverfahren (vgl. § 11) :

> Man formt die Matrix
>
> $$\left(A \mid E_n\right)$$
>
> durch elementare Zeilenumformungen um in eine Matrix der Form
>
> $$\left(E_n \mid B\right) \quad .$$
>
> Dann gilt $B = A^{-1}$

Beweis-Skizze:

Ist $B = (\mathfrak{b}_{\bullet 1} \dots \mathfrak{b}_{\bullet n})$, so ist nach (11.8) das LGS

$A\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_k$ (hierbei beschränkt man sich bei E_n in $(A|E_n)$ auf die k-te Spalte)

lösungsgleich mit

$\mathfrak{x} = E_n\mathfrak{x} = \mathfrak{b}_{\bullet k}$. Dabei ist $\mathfrak{b}_{\bullet k}$ die eindeutig bestimmte Lösung und somit die k-te Spalte von A^{-1}. □

<u>Beispiel</u>: Man bestimme

$$A^{-1} \quad \text{zu } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(3,3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$z^*_{3\cdot} = z_{3\cdot} - 2z_{2\cdot} + 4z_{1\cdot} \qquad\qquad z'_{1\cdot} = 9z^*_{1\cdot} - 2z^*_{3\cdot}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$z''_{2\cdot} = 9z'_{2\cdot} - 2z'_{1\cdot}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>(22.5) Anmerkung</u>: Ist die Inverse einer regulären Matrix A bekannt, so läßt sich das LGS

$A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ folgendermaßen auflösen:

$\mathfrak{x} = E\mathfrak{x} = (A^{-1})\ A\mathfrak{x} = A^{-1}\mathfrak{b}$.

(Hierbei wird die Assoziativität der Multiplikation zwischen Matrizen verschiedenen Types benutzt).

Zum Schluß dieses Paragraphen betrachten wir noch die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen über K hinsichtlich ihrer

multiplikativen Verknüpfung, außerdem die Menge aller Automorphismen eines VR's bzgl. Hintereinanderausführung:

(22.6) Hilfssatz

Sei V ein K-VR. Dann ist

$(\mathrm{Aut}_K V, \circ) := (\{f \in \mathrm{End}_K V \mid f \text{ bijektiv}\}, \circ)$ eine Gruppe.

Ist $V \cong K^n$ und B eine geordnete Basis von V, so induziert M_B^B nach (13.3 e) eine injektive Abbildung von Aut V in $K^{(n,n)}$, die nach (13.12) multiplikativ ist. Die Bilder von Automorphismen sind nach (22.2) genau die regulären Matrizen in $K^{(n,n)}$. Daher gilt

(22.7) Satz

(a) Ist K Körper, $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$(GL(n,K), \cdot) := (\{A \in K^{(n,n)} \mid A \text{ regulär}\}, \cdot)$$

eine Gruppe, die sogenannte volle lineare Gruppe der dim n über K.

(b) Für $V \cong K^n$ gilt

$$\mathrm{Aut}_K V \cong GL(n,K).$$

Anmerkung: Statt $\mathrm{Aut}_K V$ schreibt man auch GL(V).