§ 23 Transponierte Matrizen und Abbildungen

M ↓ Seien K Körper, $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in K^{(m,n)}$, $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} \in K^{(n,1)}$

$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix} \in K^{(m,1)}$. Wir betrachten die Gleichung $\mathfrak{y} = A\mathfrak{x}$, die bei der Darstellung von VR-Homomorphismen auftritt:

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n \alpha_{1j}\xi_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj}\xi_j\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Kommu-}\\ \text{tativi-}\\ \text{tät von K}}}{=} \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n \xi_j\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n \xi_j\alpha_{mj}\end{pmatrix}$$

↑ M bzw. in Zeilenform

$$(\eta_1,\dots,\eta_m) = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j\alpha_{1j},\dots,\sum_{j=1}^n \xi_j\alpha_{mj}\right) = (\xi_1,\dots,\xi_n)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{m1}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

(23.1) Definition

(a) Sei $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in K^{(m,n)}$. Dann heißt, mit $\beta_{k\ell} := \alpha_{\ell k}$,

$$A^T := (\beta_{k\ell})_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ \ell\in\{1,\dots,m\}}} \in K^{(n,m)}$$

die zu A transponierte Matrix; vgl. §13!

(b) Ist $n = m$ und $A = A^T$, so heißt A symmetrisch.

Beispiele: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}^T = (\xi_1,\dots,\xi_n)$

$$E_n^T = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} = E_n; \quad (\alpha_{11})^T = (\alpha_{11}) \in K^{(1,1)}.$$

Mit dieser Begriffsbildung läßt sich die Gleichung $\mathfrak{y} = A\mathfrak{x}$ auch als

$$\mathfrak{y}^T = \mathfrak{x}^T A^T$$

schreiben (vgl. die Anmerkung nach (13.5)).

Eigenschaften:

(23.2) Hilfssatz

Seien K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $T: \begin{cases} K^{(m,n)} \longrightarrow K^{(n,m)} \\ A \longmapsto A^T \end{cases}$ ist ein VR-Isomorphismus.

b) $\left.\begin{array}{l} A \in K^{(m,n)} \\ B \in K^{(n,r)} \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(c) Sei $A \in K^{(n,n)}$. Dann gilt:

A regulär $\Rightarrow A^T$ regulär $\wedge\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

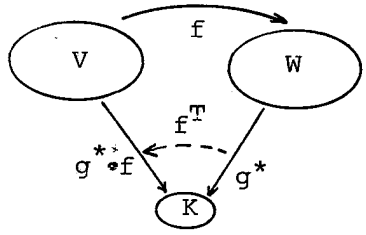
(d) $A^{TT} = A$

Beweis-Skizze:

(a), (b) durch Nachrechnen

(c) $A^T \cdot (A^{-1})^T \underset{(b)}{=} (A^{-1} \cdot A)^T = E_n^T = E_n$. □

Mit transponierten Matrizen hängen auch die "transponierten Abbildungen" zusammen:



(23.3)* Definition [1)]

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Dann heißt die durch

$f^T: \begin{cases} W^* \longrightarrow V^* \\ g^* \longmapsto g^* \circ f \end{cases}$ definierte Abbildung <u>die zu f transponierte Abbildung</u> (s. Skizze)

Mit dieser Definition gilt dann (in der nach 14.1 erwähnten Schreibweise)

$$\langle (f^T)(g^*),\ x \rangle = \langle g^*, f(x) \rangle$$

f^T ist, wie man nachprüfen kann, eine lineare Abbildung von W^* in V^*.
Für endlich-dim VR'e wollen wir eine darstellende Matrix von f^T angeben.

Dazu seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ geordnete Basis von V, $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die duale Basis zu B, ferner $C = (c_1, \ldots, c_m)$ geordnete Basis von W und $C^* = (c_1^*, \ldots, c_m^*)$ die duale Basis zu C.
Ferner sei $M_C^B(f) =: A$ und, für $g^* \in W^*$, $M_{\{1\}}^C(g^*) =: (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$.
Dann folgt wegen $M_{\{1\}}^B(g^* \circ f) = M_{\{1\}}^C(g^*) \cdot M_C^B(f)$ für die Koordinatenvektoren bzgl. der Basen B bzw. $\{1\}$ sofort

$$g^* \circ f : \varphi \longmapsto (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \cdot A\, \varphi$$

1) Ein Stern an der Nummer einer Definition, eines Satzes etc. kennzeichnet Textteile, die ohne großes Bedenken überschlagen werden können.

Es ist also $M^B_{\{1\}}(g^* \circ f) =: (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \cdot A$

Andererseits gilt $g^* \circ f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i^*$, $g^* = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j c_j^*$. Somit folgt

$$M_{B^*}(f^T(g^*)) = M_{B^*}(g^* \circ f) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T = [(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)A]^T = \tag{23.2}$$

$$= A^T \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = A^T \cdot M_{C^*}(g^*) .$$

Diese Betrachtungen führen zu folgendem Ergebnis:

(23.4) *Satz

Seien V, W endlich-dim K-VR'e mit geordneten Basen B bzw. C; sei ferner $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Dann gilt

(a) $f^T \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ und

(b) $M^{C^*}_{B^*}(f^T) = [M^B_C(f)]^T$