Kap. V: Determinanten (Fortsetzung von § 15)

§ 25 Wdh. & Ergänzung

(25.1) Berechnung durch elementare Umformungen (Wdh.)

Jede Matrix $A \in K^{(n,n)}$ lässt sich durch Addition einer Linearkombination von Zeilen (bzw. Spalten) zu einer anderen Zeile (Spalte) und durch Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen in eine Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

überführen. Wurden dabei k Zeilen- und Spaltenvertauschungen benötigt, so gilt $\det A = (-1)^k \cdot \beta_{11} \cdots \beta_{nn}$.

Bew. .... vgl. 15.5 !

Bsp. (Fortsetzung)

$K = \mathbb{R}$

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Vert. der} \\ \text{ersten beiden} \\ \text{Spalten}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Addit.d.} \\ (-3)\text{-fachen} \\ \text{d. vorletzten} \\ \text{zur letzten} \\ \text{Spalte}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\det B \\ = \det B^T}}{=} -(-2) = 2$$

(25.2) Berechung der Det. durch Entwicklung nach einer Zeile (Spalte)

(vgl. 15.7)

Sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in K^{(n,n)}$.

(a) Definition: Für $k,l \in \{1,\dots,n\}$ definieren wir

$$\tilde{A}_{kl} := (\alpha_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,n\}-\{k\} \\ j \in \{1,\dots,n\}-\{l\}}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_{11} \cdots & \alpha_{1l} \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline \alpha_{k1} & \alpha_{kl} & \alpha_{kn} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} \cdots & \alpha_{nl} \cdots & \alpha_{nn} \end{array}\right) \in K^{(n-1,n-1)}$$

($(-1)^{k+l} \cdot \det \tilde{A}_{kl}$ heißt Adjunkte von (k,l) zu A.)

Wir setzen

$$\operatorname{adj} A := \left((-1)^{k+l} \det \tilde{A}_{kl}\right)^T_{k,l \in \{1,\dots,n\}}.$$

(b) Dann gilt der folgende Satz:

Laplacescher Entwicklungssatz:
$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det A \cdot E_n$

In anderer Schreibweise: Für alle $k,l \in \{1,\dots,n\}$ ist

(i) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} (-1)^{l+j} \det \tilde{A}_{lj} = \delta_{kl} \cdot \det A.$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, betrachten wir Spezialisierungen; dazu halten wir die Zeile k fest und setzen $k = l$. (Entwicklung nach der k-ten Zeile). Nacheinander sind die Adjunkten von $(k,1),(k,2),\dots,(k,n)$ zu berechnen. Es ergibt sich aus (i):

(ii) $$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \cdot (-1)^{k+j} \det \tilde{A}_{kj}}$$ (Entwicklung nach der k-ten Zeile) (vgl. 15.7)

Bsp. (Fortsetzung)

$K = \mathbb{R}$

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \det \tilde{A}_{11} + 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \det \tilde{A}_{13} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Entwicklung nach 1. Zeile

Anmerkung: Die Vorzeichen werden nach folgendem Schema gewählt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \vdots \\ + & - & + & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & + \end{vmatrix}$$

Aus $\det A^T = \det A$ (s. 15.22) folgt eine entsprechende Aussage für die Entwicklung nach einer Spalte:

(iii) $$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{il} \quad (-1)^{i+l} \det \tilde{A}_{il}}$$ (Entwicklung nach der l-ten Spalte)

Wir vermerken noch, daß aus (i) für $k \neq l$ (<u>Entwicklung nach einer "falschen" Zeile</u>) $\sum \alpha_{kj} (-1)^{l+j} \det \tilde{A}_{lj} = 0$ folgt.

<u>Beweis des Laplace'schen Entwicklungssatzes</u>:

Wir zeigen zunächst (25.26(ii)):

Aus der Linearität der Determinanten folgt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \ \cdots 0 & \alpha_{kj} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ j-te Spalte

Aus $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \ \cdots 0 & \alpha_{kj} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ entsteht durch $k-1$ Zeilen- und

$j-1$ Spaltenvertauschungen (daher der Faktor $(-1)^{k+j}$)

die Matrix $$\hat{A}_{kj} := \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{kj} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & \tilde{A}_{kj} & \\ * & & & \end{array}\right)$$. Nun entsprechen elementare

Zeilen- und Spaltenumformungen von $\tilde{A}_{kj}$ entsprechende Umformungen von $\hat{A}_{kj}$, bei der die erste Zeile unverändert bleibt. Damit erreicht

man durch elementare Umformungen eine (transponierte) Stufenform

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{kj} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \beta_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ * & & & \beta_{nn} \end{array}\right) \qquad \text{mit}$$

$\beta_{22} \cdots \beta_{nn} = \det \tilde{A}_{kj}$; insgesamt folgt $\det \hat{A}_{kj} = \alpha_{kj} \cdot \det \tilde{A}_{kj}$.

Damit ist 25.2 b(ii) bewiesen. Um auch 25.2 b(i) einzusehen, beachte man, dass $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} (-1)^{l+j} \det \tilde{A}_{lj}$ für $k \neq l$ gerade das Ergebnis der Entwicklung nach der l-ten Zeile der Matrix

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{k-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \text{l-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad \text{gemäß (ii)}$$

und daher gleich der Determinante der Matrix $\tilde{\tilde{A}}$ ist.
Diese ist aber 0, da in $\tilde{\tilde{A}}$ zwei Zeilen übereinstimmen. □

Anwendungen

Wir verweisen zunächst noch einmal auf

$$\boxed{A \text{ regulär} \Leftrightarrow \det A \neq 0} \qquad \text{für alle } A \in K^{(n,n)}.$$

Als Verallgemeinerung betrachten wir nun:

(25.3) Rangbestimmung bei Matrizen

(a) Definition. Sei $0 \neq A = (\alpha_{ij}) \in K^{(m,n)}$ (nicht notwendig quadratisch)

Wählt man in A k Zeilen (Nr. $i_1 < \ldots < i_k$) und k Spalten ($j_1 < \ldots < j_k$) aus, so ist

$(\alpha_{i_r j_s})_{r,s \in \{1,\ldots,k\}}$ eine Untermatrix vom Typ (k,k).

Ihre Determinante heißt <u>k-reihige Unterdeterminante (k-Minor)</u> von A.

Bsp.: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ ist 3-reihige Unterdeterminante von A_1.

(b) <u>Behauptung</u>

$$\boxed{\text{rg } A = t \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha) & \text{Es existiert in } A \text{ eine } t\text{-reihige Unterdeterminante} \neq 0. \\ (\beta) & \text{Jede } (t+1)\text{-reihige Unterdeterminante von } A \text{ (falls existent) ist } 0. \end{cases}}$$

Beweis ... (s. Literatur!)

<u>Beispiel</u>: Die Matrix A_1 aus obigem Beispiel hat Rang 3, da ein 3-Minor ungleich 0 existiert und rg $A_1 \leq 3$ gilt.

<u>(25.4) Anmerkung</u>

Satz (25.3) liefert auch ein <u>Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren</u>. Man nehme ihre Koordinaten-Vektoren als Zeilen (bzw. Spalten) einer Matrix.

<u>Beispiel</u>: $(0,1,5,0),(1,2,-7,3),(1,1,4,1) \in \mathbb{R}^4$ sind l.u., siehe obiges Beispiel.

<u>(25.5) Volumenberechnung</u>

Das Volumen des von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{R}^3$ erzeugten <u>Parallelflachs</u> $P(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) := \{\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma \mid \alpha,\beta,\gamma \in [0,1]\}$ ist gegeben durch

$$|\det(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c})|\ ;$$

(vgl. Motivation bei Einführung der Determinanten).

(25.6)* Inversebildung bei regulären Matrizen

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{(n,n)}$ und A regulär. Dann gilt

$\underline{A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \mathrm{adj}(A)}$, (ausführlicher also:

$A^{-1} = (\beta_{ij}) \in K^{(n,n)}$ mit $\beta_{ij} := (\det A)^{-1}(-1)^{j+i} \det \underbrace{\tilde{A}_{ji}}_{\text{Adjunkte von } (j,i)}$)

Für die praktische Berechnung der Inversen einer Matrix ist diese Methode jedoch meist zu umständlich. (Die Formel folgt sofort aus 25.2b). Besser verwendet man ein Schema der Form $(A \mid E_n)$, das man durch elementare Umformungen in $(E_n \mid A^{-1})$ überführt. (Denn: $Ax = e_i \Rightarrow x = A^{-1} e_i$.)

(25.7)* Cramersche Regel

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases}$$

mit quadratischer Koeffizienten-Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in K^{(n,n)}$.

Ist dann $\det A \neq 0$, also A regulär, so läßt sich die (eindeutig bestimmte) Lösung von (1) angeben durch

$$\xi_j = (\det A)^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j-1} & \beta_1 & \alpha_{1j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj-1} & \beta_n & \alpha_{nj+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ j-te Spalte

für $j = 1, \ldots, n$.

Beweis: Aus (25.6) folgt: $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \det A^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det A_{kj} \, \beta_j \right)$ $j=1..n$;

damit ist ξ_j gleich der Entwicklung der angegebenen Matrix nach der j-ten Spalte. □

Beispiel: Sei $K = \mathbb{R}$ und

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 \qquad = 1 \\ 3\xi_1 + \qquad + \xi_3 = 4 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 7 \end{cases} \quad . \text{ Man erhält } \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1. \quad \text{Also ist die}$$

Cramersche Regel anwendbar. Berechnung von ξ_3:

$$\xi_3 = (-1)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right] = 2 \cdot 13 - 1 = 25$$

<u>Anmerkung:</u> Die Cramersche Regel ist ebenfalls für praktische Rechnung meist zu umständlich.