Kapitel III: Vektorräume

§ 6 Vektorräume und Unterräume – Definitionen und Beispiele

In diesem Paragraphen kommen wir nun endlich zurück auf die in §1 erörterten Beispiele und behandeln diejenige Struktur, die durch die dort herausgestellten Gesetze definiert ist, für die also jene Beispiele Modelle liefern.

6.1 Definition: Vektorraum über einem Körper

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und V eine Menge. Ferner seien Verknüpfungen $\oplus : V \times V \to V$ (Addition) und $\underset{K}{\odot} : V \times K \to V$ (S-Multiplikation) definiert. Für diese seien folgende Axiome erfüllt:

(V1) $(V, \oplus)$ ist kommutative Gruppe.

(V2) Für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$ gelten die 'gemischten Distributivgesetze':
$(v \oplus w) \odot \lambda = (v \odot \lambda) \oplus (w \odot \lambda)$ und $v \odot (\lambda + \mu) = (v \odot \lambda) \oplus (v \odot \mu)$.

(V3) Für alle $v \in V$, für alle $\lambda, \mu \in K$ gilt das 'gemischte Assoziativgesetz':
$v \odot (\lambda \cdot \mu) = (v \odot \lambda) \odot \mu$.

(V4) Für alle $\forall v \in V$ ist $v \odot 1 = v$.

Dann heißt $(V, \oplus, \underset{K}{\odot})$ **Vektorraum** über K, K-Vektorraum (Abkürzung: K-VR) oder linearer Raum.
Da wir uns auf Vektorräume über Körpern beschränkt haben (eine analoge Definition von 'rechten' Vektorräumen über Schiefkörpern ist möglich), brauchen wir nicht streng zu unterscheiden, ob wir von links oder von rechts mit den Skalaren multiplizieren. Wir definieren

$$\lambda \odot v := v \odot \lambda.$$

Zur Schreibweise: Durch die verwendeten Zeichen $+, \oplus, \cdot, \odot$ wollen wir (aus didaktischen Gründen) vorläufig zwischen den beiden Additionen ($+$ in K, $\oplus$ in V) und den beiden Multiplikationen ($\cdot$ in K und $\odot$, der so genannten **S-Multiplikation**) unterscheiden.. Falls keine Missverständisse zu befürchten sind, schreiben wir anstelle von $\oplus$ ebenfalls $+$, anstelle von $v \odot \lambda$ nur $v \cdot \lambda$ oder $v\lambda$, verwenden also dieselben Symbole für verschiedene Verknüpfungen. Später schreiben wir statt $(V, +, \cdot)$ auch nur V und weiterhin statt $(K, +, \cdot)$ nur K. Zur Ersparnis von Klammern definieren wir, dass die S-Multiplikation mehr als die Addition binde, also dass z.B. $\lambda v + w := (\lambda v) + w$ gilt.

Beispiele:

M
↓

- Die Menge der Vektoren der Ebene mit den in (1.1) definierten Verknüpfungen (Addition, S-Multiplikation) bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{V}$.

Ähnlich bilden

- die Vektoren des Raumes (vgl. 1.2)
- die Lösungstripel der linearen homogen Gleichung $(*)$ von (1.3)
- die Lösungsfunktionen der linearen homogenen Differenzialgleichung von (1.4) mit den entsprechenden. Additionen bzw. S-Multiplikationen

jeweils einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

- Die Menge der Wörter der Länge 5 über dem Alphabet $\{0,1\}$ bildet bzgl. der in (1.5) definierten (komponentenweisen) Addition und S-Multiplikation einen Vektorraum über dem Körper GF(2).

$\uparrow$ M

Fortsetzung der Beispiele von Vektorräumen:

(a) Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$V := K^n = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in K\}$,

$\oplus : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \oplus (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$,

$\underset{K}{\odot} : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \odot \lambda := (\alpha_1 \cdot \lambda, \alpha_2 \cdot \lambda, \ldots, \alpha_n \cdot \lambda)$

(also Addition und S-Multiplikation sind komponentenweise erklärt).

Dann gilt: $\boxed{(K^n, \oplus, \underset{K}{\odot}) \text{ ist ein } K\text{-Vektorraum.}}$ <u>(1. Standardbeispiele)</u>

Spezialfälle:

(1) $n = 1$: Jeder Körper K ist auch K-Vektorraum.

(2) $n = 2$, $K = \mathrm{GF}(2)$, $V = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$\oplus$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

$\underset{K}{\odot}$: $(\alpha, \beta) \odot 0 := (0,0)$

$(\alpha, \beta) \odot 1 := (\alpha, \beta)$

für $\alpha, \beta \in \{0,1\}$.

(3) $n = 5$, $K = \mathrm{GF}(2)$, $V =$ Menge der Wörter der Länge 5 über $\{0,1\}$; $\oplus$, $\underset{K}{\odot}$ komponentenweise.

(4) $\mathbb{R}^2 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\}$; $(\xi_1, \xi_2) \oplus (\eta_1, \eta_2) := (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$ und

$(\xi_1, \xi_2) \odot \lambda = (\xi_1 \cdot \lambda, \xi_2 \cdot \lambda)$ für alle $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_1, \lambda \in \mathbb{R}$

.

(5) Analog zu (4): $(\mathbb{R}^3, \oplus, \underset{\mathbb{R}}{\odot})$.

Anmerkung. Unter einer Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ über K mit Index- Menge I verstanden wir in 2.4.7 die Abbildung $I \to K$ mit $i \mapsto \lambda_i$.

Damit definieren wir nun Folgendes:

(c) Seien $(K,+,\cdot)$ ein Körper, I nicht-leere Menge sowie

$K^I := \{(\lambda_i)_{i \in I} : \lambda_i \in K \text{ für alle } i \in I\}$;

$\oplus : (\lambda_i)_{i\in I} + (\mu_i)_{i\in I} := (\lambda_i + \mu_i)_{i\in I}$;

$\underset{K}{\odot} : (\lambda_i)_{i\in I} \odot \mu := (\lambda_i \cdot \mu)_{i\in I}$.

Dann gilt $\boxed{(K^I, \oplus, \underset{K}{\odot}) \text{ ist ein } K\text{-Vektorraum.}}$

(2.Standardbeispiele; umfassen die 1.Strandardbeispiele)

Beweis. ...

Anmerkung. Jede Familie $f = (\lambda_i)_{i\in I}$ ist ja definitionsgemäß eine Abbildung von I in K (s.o.!); Umgekehrt lässt sich jede solche Abbildung als Familie schreiben. Also gilt

$$K^I = \mathrm{Abb}(I, K).$$

Für $f = (\lambda_i)_{i\in I}$ und $g = (\mu_i)_{i\in I}$ gilt dann $f \oplus g = (\lambda_i + \mu_i)_{i\in I}$ und $f \odot \mu = (\lambda_i \cdot \mu)_{i\in I}$, also (in Übereinstimmung mit früheren Definitionen):

$f \oplus g : (f \oplus g)(i) = \lambda_i + \mu_i = f(i) + g(i)$,

$f \odot \mu : (f \odot \mu)(i) = \lambda_i \cdot \mu = f(i) \cdot \mu$.

Damit lassen sich die angeführten Beispiele auch in der Form

$$\big(\mathrm{Abb}(I, K), \oplus, \underset{K}{\odot}\big)$$

schreiben.

Speziell:

- Für $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt $K^I = K^n$; da auch Addition und S-Multiplikation übereinstimmen, sind die Beispiele aus (a) auch unter den eben in (b) definierten.
- Für $I = \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{R}$ erhält man den **Vektorraum der reellen Zahlfolgen**.

(d) Sei $(K, +, \cdot)$ Körper und I nicht-leere Menge.

$$\boxed{K^{(I)}} := \{(\lambda_i)_{i\in I} | (\lambda_i)_{i\in I} \in K^I \text{ und } \lambda_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\} \quad ;$$

(„$\lambda_i = 0$ **für fast alle** $i \in I$“ bzw. „$\lambda_i \neq 0$ für höchstens endlich viele $i \in I$“ sagen wir, wenn $\{i \in I | \lambda_i \neq 0\}$ endlich ist; wir sprechen auch von einer **Abbildung von I in Kmit endlichem Träger**).

Addition $\oplus$ und S-Multiplikation $\underset{K}{\odot}$ definieren wir wie bei K^I (eingeschränkt auf Urbild $K^{(I)} \times K^{(I)}$ bzw. $K^{(I)} \times K$ und Bild $K^{(I)}$). Dann gilt

$\boxed{(K^{(I)}, \oplus, \underset{K}{\odot}) \text{ ist ein } K\text{-Vektorraum .}}$ <u>Weitere Standardbeispiele</u>

Ist speziell $|I| = n \in \mathbb{N}$, so gilt $K^{(I)} = K^I$, im Falle $I = \{1, \ldots, n\}$ also insbesondere $K^{(I)} = K^n$.

6.2 Hilfssatz: Eigenschaften der neutralen und inversen Elemente

Sei $(V, \oplus, \underset{K}{\odot})$ Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$, bezeichne ferner

0 das neutrale Element von $(K, +)$ (Nullelement des Körpers),
1 das neutrale Element von $(K, \cdot)$ (Einselement des Körpers),
$-\lambda$ die additive Inverse von λ, $\lambda \in K$,
$\mathfrak{o}$ das neutrale Element von $(V, \oplus)$ (Nullvektor),
$-v$ das additive Inverse von v, $v \in V$ (auch Gegenvektor von v genannt.)

Dann gilt für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & v \odot 0 = \mathfrak{o}, \\ & \mathfrak{o} \odot \lambda = \mathfrak{o}; \\ (2) & v \odot \lambda = \mathfrak{o} \Rightarrow v = \mathfrak{o} \vee \lambda = 0; \\ (3) & (-v) \odot \lambda = -(v \odot \lambda) = v \odot (-\lambda); \\ & \text{speziell:} \quad -v = v \odot (-1). \end{array}}$$

Beweis. (1) $\mathfrak{o} \oplus (v \odot 0) \underset{\text{(V1)}}{=} v \odot 0 \underset{\text{(K2)}}{=} v \odot (0+0) \underset{\text{(V2)}}{=} (v \odot 0) \oplus (v \odot 0) \underset{\text{Kürzen (V1)}}{\Rightarrow} \mathfrak{o} = v \odot 0$,

$\mathfrak{o} \oplus (\mathfrak{o} \odot \lambda) = \mathfrak{o} \odot \lambda = (\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}) \odot \lambda = (\mathfrak{o} \odot \lambda) \oplus (\mathfrak{o} \odot \lambda) \Rightarrow \mathfrak{o} = \mathfrak{o} \odot \lambda.$

(2) Sei $v \odot \lambda = \mathfrak{o}$ und $\lambda \neq 0$; dann existiert λ^{-1} mit $\lambda \cdot \lambda^{-1} = 1$.

$v \underset{\text{(V4)}}{=} v \odot 1 = v \odot (\lambda \cdot \lambda^{-1}) \underset{\text{(V3)}}{=} (v \odot \lambda) \odot \lambda^{-1} \underset{\text{Vor.}}{=} \mathfrak{o} \odot \lambda^{-1} \underset{(1)}{=} \mathfrak{o}.$

(3) $[v \odot (-\lambda)] \oplus [v \odot \lambda] \underset{\text{(V2)}}{=} v \odot [(-\lambda) + \lambda] \underset{\text{(K2)}}{=} v \odot 0 \underset{(1)}{=} \mathfrak{o} \Rightarrow v \odot (-\lambda) = -(v \odot \lambda).$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich $-v = -(v \odot 1) = v \odot (-1)$ und damit

$v \odot (-\lambda) \underset{\substack{\text{Eigenschaft} \\ \text{von } -1 \in K}}{=} v \odot [(-1) \cdot \lambda] \underset{\text{(V3)}}{=} [v \odot (-1)] \odot \lambda = (-v) \odot \lambda$.

□

6.3 Definition: Unterraum

Sei $(V, +, \underset{K}{\cdot})$ ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann heißt U (linearer) **Unterraum** (**UR**, **Teilraum**) von $(V, +, \underset{K}{\cdot})$, wenn $+$ bzw. $\underset{K}{\cdot}$ auf U Verknüpfungen $+_U := +|_{U \times U \to U}$ bzw. $\underset{K_U}{\cdot} = \underset{K}{\cdot}\Big|_{U \times K \to U}$ induzieren (– insbesondere also U abgeschlossen bzgl. $+$ und $\underset{K}{\cdot}$ ist –) und

$$(U, +_U, \underset{K_U}{\cdot}) \text{ ein } K\text{-Vektorraum ist.}$$

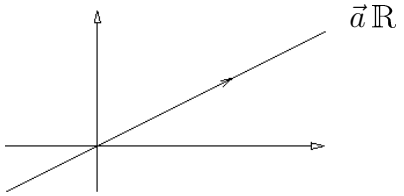
Beispiel. (a) Sei $\mathcal{V}$ der Vektorraum der Vektoren der Ebene (s. 1.1).

Für jedes $\vec{a} \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{o}\}$ ist

$$\vec{a}\mathbb{R} := \{\vec{a}k | k \in \mathbb{R}\}$$

(s. Figur 6.1 !) ein Unterraum von $\mathcal{V}$.

Es lässt sich zeigen, dass dies die einzigen von $\mathcal{V}$ und $\{\vec{o}\}$ verschiedenen Unterräume von $\mathcal{V}$ sind.



Figur 6.1: $\vec{a}\,\mathbb{R}$ als Gerade (für $\vec{a} \neq \vec{o}$).

(b) In einem Vektorraum V sind stets V und $\{\mathfrak{o}\}$ Unterräume.

$\{\mathfrak{o}\}$ heißt Nullraum oder trivialer Unterraum. Ein von V verschiedener Unterraum von V heißt echter Unterraum von V.

(c) $K^{(I)}$ ist Unterraum des K-Vektorraumes $(K^I, +, \underset{K}{\cdot})$ (vgl. Bsp.(c) und (d) nach (6.1)), allerdings für $|I| < \infty$ kein echter Unterraum, da dann $K^{(I)} = K^I$ gilt.

Um nicht jedesmal sämtliche VR-Eigenschaften eines UR-„Kandidaten“ nachprüfen zu müssen, zeigen wir

6.4 Satz (Unterraum-Kriterium)

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann gilt:

$$U \text{ ist Unterraum von } V \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & U \neq \emptyset. \quad !! \\ \text{(ii)} & U \text{ ist abgeschlossen bzgl. Addition und} \\ & \text{S-Multiplikation.} \end{cases}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“ U UR $\Rightarrow (U, +_U)$ Gruppe $\Rightarrow \mathfrak{o} \in U$ (also $U \neq \emptyset$) und U abgeschlossen bzgl. $+$.

Ferner ist $\underset{K_U}{\cdot} = \underset{K}{\cdot}\Big|_{U \times K \to U}$ (per definitionem), also U abgeschlossen bzgl. S-Multiplikation.

„$\Leftarrow$“ Die Einschränkung von $+$ auf $U \times U \to U$ und $\underset{K}{\cdot}$ auf $U \times K \to U$ ist wegen (ii) möglich.

(V2) bis (V4) und die Kommutativität der Addition gelten für V und damit auch für Teilmengen von V. Zu zeigen bleibt also aus (V1), dass $(U, +_U)$ Gruppe, also Untergruppe von $(V, +)$, ist:

Nach (i) ist $U \neq \emptyset$; nach (6.2)(3) gilt $-u = u \cdot (-1)$ für jedes $u \in U$, wegen (ii) also $-u \in U$ für jedes $u \in U$ und ebenfalls nach (ii) damit $U + (-U) \subseteq U$. Nach dem UG-Kriterium (3.16) folgt die Behauptung.

□

Fortsetzung der Beispiele von Unterräumen:

(d) $V = \mathbb{R}^3$; $U = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R} \wedge -2x + 5y + z = 0\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^3$. (Vgl. dazu (1.3) !)

Beweis. $(0, 0, 0) \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$;

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U \Rightarrow -2x_1 + 5y_1 + z_1 = 0$ und $-2x_2 + 5y_2 + z_2 = 0 \Rightarrow$ $-2(x_1+x_2)+5(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = 0$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R} : -2(x_1 \cdot \lambda)+5(y_1 \cdot \lambda)+(z_1 \cdot \lambda) = 0 \Rightarrow$ $(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2) \in U$ und $(x_1, y_1, z_1) \cdot \lambda \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \underset{(6.4)}{\Rightarrow}$ Behauptung. □

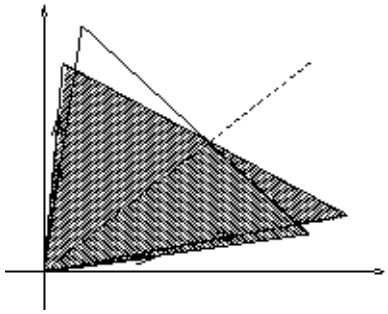
(e) $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (die Menge der stetigen reellen Funktionen auf $[0, 1]$) bildet einen Unterraum von $(\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \underset{\mathbb{R}}{\cdot})$, des Vektorraumes aller reellen Abbildungen mit Definitionsbereich $[0, 1]$.

M
↓
↑
M

(f) Im Vektorraum der Vektoren des Raumes (vgl. 1.2) erzeugen linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Menge

$$\vec{a}\,\mathbb{R} + \vec{b}\,\mathbb{R} = \{\vec{a}\ k + \vec{b}\ l \mid k, l \in \mathbb{R}\};$$

diese Mengen bilden Unterräume, ebenso $\vec{c}\,\mathbb{R} = \{\vec{c}\ k | k \in \mathbb{R}\}$ für jeden Vektor $\vec{c} \neq \vec{o}$.
Die Unterräume der ersten Art bestehen jeweils aus den Ortsvektoren einer „Ebene durch den Nullpunkt“ (s. Figur 6.2 !), die der zweiten Art aus denen einer „Nullpunktsgeraden“. Je zwei verschiedene Ebenen durch den Nullpunkt schneiden sich in einer Geraden. Allgemeiner vermuten wir, dass der Durchschnitt zweier Unterräume wieder ein Unterraum ist.
Anmerkung: $\vec{p} + \vec{m}\mathbb{R}$ ist für $\vec{p} \notin \vec{m}\mathbb{R}$ kein Unterraum.



Figur 6.2: Schnitt zweier Ebenen durch den Nullpunkt

6.5 Hilfssatz: Durchschnitt von Unterräumen

Seien V ein K-Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine nicht-leere Familie von Unterräumen von V.
Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V.

Beweis. Für alle $i \in I$ gilt: $\mathfrak{o} \in U_i$, daher $\mathfrak{o} \in \bigcap_{i \in I} U_i$ und somit $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$.
Seien $v, w \in \bigcap_{i \in I} U_i$ und $\lambda \in K$. Dann gilt für alle $i \in I$ zunächst $v, w \in U_i$ und, da U_i Unterraum ist, auch $\left\{ \begin{matrix} v + w \in U_i \\ v\lambda \in U_i \end{matrix} \right\}$, somit $v + w, v\lambda \in \bigcap_{i \in I} U_i$; nach (6.4) folgt die Behauptung. □

Eine wichtige Folgerung ist:

6.6 Korollar

Seien $(V, +, \underset{K}{\cdot})$ ein K-Vektorraum und $T \subseteq V$.
Dann existiert <u>genau ein</u> Unterraum U_0 von V mit

(a) $T \subseteq U_0$.

(b) Für jeden Unterraum W von V mit $T \subseteq W$ gilt $U_0 \subseteq W$.

d.h. U_0 ist (eindeutig bestimmter) kleinster T enthaltender Unterraum.

6.7 Bezeichnung: Erzeugnis, Erzeugendensystem

Der Unterraum U_0 der in (6.6) aufgeführten Eigenschaften heißt der von T **erzeugte Unterraum**, von T **aufgespannte Unterraum** oder die **lineare Hülle** von T, in Zeichen $U_0 = \langle T \rangle$. T heißt **Erzeugendensystem** von $\langle T \rangle$.

Beweis von (6.6). (Allgemeineres Beweisprinzip!) Betrachte
$\mathcal{U} := \{X | X \text{ UR von } V \wedge T \subseteq X\}$! Es gilt: $V \in \mathcal{U}$, also $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Wir definieren:

$$U_0 := \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X \subseteq V.$$

Behauptung: U_0 hat die geforderten Eigenschaften.
Nach (6.5) ist U_0 Unterraum von V, nach Konstruktion ist $T \subseteq U_0$.
Sei W Unterraum von V mit $T \subseteq W$. Dann ist $W \in \mathcal{U}$ und damit

$$U_0 = \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X \subseteq W.$$

Eindeutigkeit:
Seien U_1, U_2 Unterräume der Eigenschaften (a) und (b). Dann gilt $U_1 \subseteq U_2$ (mit $U_0 = U_1$ und $W = U_2$) und $U_2 \subseteq U_1$ (mit $U_0 = U_2$ und $W = U_1$), insgesamt also $U_1 = U_2$. □

M
↓

Beispiel. Sei $V = \mathcal{V}$ (vgl. (1.1)), der Vektorraum der Vektoren der Ebene.

(i) Setzen wir $T = \{\vec{a}\}$ mit $\vec{a} \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{o}\}$, so erhalten wir
$\langle \vec{a} \rangle := \langle \{\vec{a}\} \rangle = \vec{a}\,\mathbb{R}$ (geometrische Deutung: Nullpunktsgerade in Richtung von $\vec{a}$, s.o.!).

Beweis. $\vec{a}\,\mathbb{R}$ ist Unterraum (Bsp. (a), s.o.); ferner gilt
$\forall r \in \mathbb{R} : \vec{a}r \in \langle \vec{a} \rangle$ (da mit $\vec{a}$ auch alle skalaren Vielfache von $\vec{a}$ in einem Unterraum liegen). $\square$

(ii) Sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear unabhängige Vektoren aus $\mathcal{V}$, so gilt: $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle := \langle \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \rangle = \vec{a}_1\mathbb{R} + \vec{a}_2\mathbb{R} = \mathcal{V}$.

(iii) Es gilt allgemein: $\langle \emptyset \rangle = \{\mathfrak{o}\}$.

↑ M

Im Folgenden werden wir versuchen, auch allgemein einen Zusammenhang zwischen dem Erzeugnis von T und den Linearkombinationen von Elementen von T herzustellen und so $\langle T \rangle$ direkter zu beschreiben.

6.8 Definition: Linearkombination

Sei V ein K-Vektorraum!

(a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt jeder Vektor

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i \quad (\text{ mit } \lambda_i \in K \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\})$$

eine **Linearkombination** (LK) der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

(b) Sei $\emptyset \neq T \subseteq V$. Unter einer Linearkombination von (Elementen von) T versteht man eine Linearkombination von *endlich vielen* Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in T$.

(c) Für $T \subseteq V$ definieren wir:

$\mathrm{LK}(T) := \{v \in V | v \text{ Linearkombination von } T\}$, falls $T \neq \emptyset$, und

$\mathrm{LK}(\emptyset) := \{\mathfrak{o}\}$

Beispiele

(a) Jeder Vektor von $\mathcal{V}$ aus (1.1) ist Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.

(b) Sei K Körper und $V = K^n$; mit

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &:= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

gilt $V = LK(\{e_1, \ldots, e_n\})$ wegen $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} e_i \xi_i$.

(c) Sei K Körper und $\mathcal{P}(K)$ die Menge der Polynomabbildungen $f = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i (\mathrm{id}_K)^i$. Bei der Einführung von $\mathcal{P}(K)$ (§5 Bsp. (d)) haben wir, u.a. eine Addition $+$ auf $\mathcal{P}(K)$ definiert: $f+g: \quad (f+g)(x) := f(x)+g(x)$. Eine skalare Multiplikation $\underset{K}{\cdot}$ ist gegeben durch die Festsetzung

$$\alpha f = \alpha \underset{K}{\cdot} f : \begin{cases} K \to K \\ x \mapsto \alpha \cdot f(x). \end{cases}$$

Es gilt also $\alpha \underset{K}{\cdot} f = f_\alpha \cdot f$ sowie $(\alpha \underset{K}{\cdot} f)(x) = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\mathrm{id}_K)^i(x) = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha\alpha_i x^i$ und $f = \sum_{i=0}^{n} f_{\alpha_i} (\mathrm{id}_K)^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \underset{K}{\cdot} (\mathrm{id}_K)^i$.

Man kann zeigen, dass $(\mathcal{P}(K), +, \underset{K}{\cdot})$ ein K-Vektorraum ist.

Es gilt: $\mathcal{P}(K) = \mathrm{LK}\{(\mathrm{id}_K)^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ (wobei das Produkt von Funktionen wieder argumentweise zu bilden ist).

(c') Für den Vektorraum $K[X] := \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in K\}$ der Polynome (mit geeigneter Addition und S-Multiplikation, s.LINA II) gilt $K[X] = LK\{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

6.9 Satz (Darstellung des Erzeugnisses)

Sei V ein K-Vektorraum und $T \subseteq V$. Dann gilt:

$$\langle T \rangle = \mathrm{LK}(T).$$

Beweis. 1. Fall $T = \emptyset$

$\langle \emptyset \rangle = \bigcap_{\substack{U \text{ UR} \\ \text{von } V}} U = \{\mathfrak{o}\} = \mathrm{LK}(\emptyset)$, da $\{\mathfrak{o}\}$ Unterraum ist und $\emptyset \subseteq U$ für jeden Unterraum U von V gilt.

2. Fall $T \neq \emptyset$

(a) $\underline{T \subseteq \mathrm{LK}(T).}$

$t \in T \Rightarrow t = t \cdot 1 \in \mathrm{LK}(T)$.

(b) $\underline{\mathrm{LK}(T) \text{ ist Unterraum von } V.}$

Nach (a) ist $\mathrm{LK}(T) \supseteq T \neq \emptyset$.

Wir zeigen die Abgeschlossenheit von $\mathrm{LK}(T)$ bzgl. Addition und S-Multiplikation:

Seien $v, w \in \mathrm{LK}(T)$ und $\lambda \in K$. Nach Definition (6.8) (b) haben v und w dann folgende Darstellung:

$$v = \sum_{i=1}^{r} v_i \lambda_i \quad \text{und } w = \sum_{j=1}^{s} w_j \mu_j \text{ mit geeigneten } r, s \in \mathbb{N},$$
$$v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \in T,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s \in K.$$

Damit gilt

$$v + w = (\sum_{i=1}^{r} v_i \lambda_i + \sum_{j=1}^{s} w_j \mu_j) \in \mathrm{LK}(T)$$

($v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ sind ebenfalls nur endlich viele Vektoren aus T) sowie

$$v \cdot \lambda = (\sum_{i=1}^{r} v_i \lambda_i) \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{r} v_i (\lambda_i \lambda) \in \mathrm{LK}(T).$$

Nach dem UR-Kriterium (6.4) folgt die Zwischenbehauptung.

(c) $\underline{\langle T \rangle \subseteq \mathrm{LK}(T)\ .}$

Diese Tatsache folgt aus (a) und (b), da $\mathrm{LK}(T)$ unter den Unterräumen vorkommt, über die der Durchschnitt gebildet wird.

(d) $\underline{\mathrm{LK}(T) \subseteq \langle T \rangle\ .}$

Sei $v \in \mathrm{LK}(T)$; dann existieren $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in T$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i$. Da $v_i \in T$ für $i = 1, \ldots, n$ und $T \subseteq \langle T \rangle$ (vgl. 6.6 !) ist, gilt nach (6.4): $v_i \lambda_i \in \langle T \rangle$ für $i = 1, \ldots, n$ und damit $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i \in \langle T \rangle$.

Damit ist die „doppelte Inklusion“ gezeigt.

□