§ 7 Lineare Unabhängigkeit, Basis – Existenzsatz

M ↓

Am Ende des vorigen Paragraphen betrachteten wir bei vorgegebener Teilmenge T eines K-Vektorraumes V das Erzeugnis U von T in V. Die Bildung des Erzeugnisses ist dabei ein wichtiges Prinzip, das auch in anderen Gebieten der Algebra in ähnlicher Weise herangezogen wird. Die Information über das Erzeugnis ist dabei jeweils schon ganz in dem Erzeugendensystem enthalten. In unserem Falle lässt sich $U = \langle T \rangle$ mit Hilfe von Linearkombinationen von T beschreiben.
Wir verlagern entsprechend unseren Standpunkt: Wir geben den Unterraum U vor und fragen nach erzeugenden Mengen von U. Zunächst stellen wir fest:

$$U = \langle U \rangle,$$

so dass also jeder Unterraum als Erzeugnis (seiner selbst) geschrieben werden kann. Es ist aber, zweckmäßig, das **Erzeugendensystem** T von U **möglichst klein auszuwählen**, also ohne solche Vektoren, die sich aus den übrigen durch Linearkombination ergeben.
Diese treten auf, wenn es $v_1, \ldots, v_n \in T$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i = \vec{o} \text{ und (z.B.) } \lambda_1 \neq 0.$$

Denn dann ist v_1 selbst Linearkombination der übrigen v_i:

$$v_1 = -(\sum_{i=2}^{n} v_i \lambda_i)\lambda_1^{-1} = \sum_{i=2}^{n} v_i(-\lambda_i \lambda_1^{-1}).$$

↑ M

7.1 Definition: Lineare Unabhängigkeit, lineare Abhängigkeit

(a) (i) Eine **endliche Teilmenge** T von V heißt **linear abhängig** (lin.abh., l.a.) g.d.w. gilt: Es existieren Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, nicht alle $\lambda_i = 0$, und $v_1, \ldots, v_n \in T$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ derart, dass $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \lambda_i = \vec{o}$. (Es existiert dann also eine „nicht-triviale Darstellung des Nullvektors“.)

(ii) Das n-Tupel von Vektoren $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ heißt **linear abhängig** g.d.w. gilt:

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ lin.abh. } \vee \; v_1, \ldots, v_n \text{ nicht paarweise verschieden.}$$

(In diesem Falle sagen wir auch: die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängig.)

(iii) v_1 heißt linear abhängig von $v_2, \ldots, v_n$, wenn $v_1 \in \mathrm{LK}(\{v_2, \ldots, v_n\})$ gilt; dann sind insbesonder $v_1, v_2, \ldots v_n$ linear abhängig.

(iv) Eine **Teilmenge** M von V (nicht notwendig endlich) heißt **linear abhängig**, wenn gilt: Es existiert eine endliche Teilmenge von M, die linear abhängig ist.

(b) **linear unabhängig** (lin.unabh., l.u.) $\equiv$ nicht linear abhängig, also für $M \subseteq V$:

$$M \text{ lin.unabh. Menge } \Leftrightarrow \text{ Jede } \textbf{endliche} \text{ Teilmenge von } M \text{ ist lin.unabh. .}$$

und:

$$\begin{aligned} v_1, \ldots, v_n \text{ lin.unabh.} &:\Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n \text{ nicht lin.abh.} \\ &\Leftrightarrow \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ lin.unabh. und } v_1, \ldots, v_n \text{ paarweise versch.} \\ &\Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i = \vec{o} \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\right] \end{aligned}$$

7.2 Beispiele

(a) $V = \mathbb{R}^2$

(i) $(1,0)$ und $(2,2)$ sind linear unabhängig.

Beweis. Zu zeigen ist $(1,0) \cdot \lambda + (2,2) \cdot \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$(1,0)\lambda + (2,2)\mu = (0,0) \Rightarrow (\lambda, 0) + (2\mu, 2\mu) = (0,0) \Rightarrow (\lambda + 2\mu, 2\mu) = (0,0) \Rightarrow \lambda + 2\mu = 0 \wedge \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$ □

(ii) $(1,0), (2,2), (-2,1), (1, \sqrt{2})$ sind linear abhängig.

Beweis. $(1,0) \cdot \underline{3} + (2,2) \cdot (\underline{-\frac{1}{2}}) + (-2,1) \cdot \underline{1} + (1, \sqrt{2}) \cdot 0 = \vec{o}$ □

(Aus dem Beweis sehen wir, dass sogar $(1,0)$, $(2,2)$, $(-2,1)$ linear abhängig sind).

(b) $\boxed{V = K^n}$, K Körper; $e_i := (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0)$ (vgl. Beispiel (b) nach (6.9)

(i) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist linear unabhängig.

Beweis. $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i \lambda_i = \vec{o} \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \vec{o} \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n : \lambda_i = 0.$ □

(ii) Die Menge $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), e_1, \ldots, e_n\}$ ist linear abhängig für jedes n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Beweis. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot (-1) + \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \lambda_i = \vec{o}$ und $-1 \neq 0$. □

Anmerkung. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \lambda_i \in \mathrm{LK}(\{e_1, \ldots, e_n\})$

(c) Verallgemeinerung von (b):

In $\boxed{K^I}$ definieren wir e_i für $i \in I$ durch

$$e_i := (\delta_{ij})_{j\in I} : \begin{cases} I \to K, \\ j \mapsto \delta_{ij}. \end{cases} \qquad \text{wobei} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \in K & \text{für } i \neq j \\ 1 \in K & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Dann ist $\{e_i | i \in I\}$ linear unabhängig.

Beweis. Für jede endliche Teilmenge $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\}$ folgt aus $\sum\limits_{k=1}^{n} e_{i_k}\lambda_k = \vec{o}$ zunächst $\vec{o} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\delta_{i_k j})_{j\in I} \cdot \lambda_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{i_k j}\lambda_k\right)_{j\in I}$, also $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{i_k j}\lambda_k = 0$ für jedes $j \in I$. Wählen wir für $l \in \{1, \ldots, n\}$ nun $j = i_l$, so erhalten wir daraus und aus $\delta_{i_k j} = 0$ für $i_k \neq i_l = j$ sofort $\delta_{i_l i_l}\lambda_l = 0$, also $\lambda_l = 0$. □

(d) In $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$, dem Vektorraum der Polynomabbildungen über $\mathbb{R}$, ist $\{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig.

Beweis. Wäre die Menge linear abhängig, so gäbe es eine linear abhängige endliche Teilmenge, insbesondere ein $m \in \mathbb{N}_0$ und Elemente $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in K$ mit

$$\vec{o} = \sum_{i=0}^{m} (\mathrm{id})^i \lambda_i \quad \text{und} \quad \lambda_m \neq 0.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt somit $\sum\limits_{i=0}^{m} x^i \lambda_i = 0$. Durch m-maliges Differenzieren erhält man

$$\lambda_m \cdot m! = 0. \quad ↯ \quad \text{(Widerspruch)}$$

□

(d') $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ist linear unabhängige Teilmenge von $V = K[X]$.

Anmerkung. In $\mathcal{P}\big(\mathrm{GF}(2)\big)$ sind schon $(\mathrm{id}_{\mathrm{GF}(2)}), (\mathrm{id}_{\mathrm{GF}(2)})^2$ linear abhängig:
$\big[\mathrm{id}_{\mathrm{GF}(2)} + (\mathrm{id}_{\mathrm{GF}(2)})^2\big](x) = x + x^2 = 0$ für alle $x \in \mathrm{GF}(2)$.
Es gilt sogar: $\mathrm{id}_{\mathrm{GF}(2)} = (\mathrm{id}_{\mathrm{GF}(2)})^2$.

7.3 Hilfssatz: Teilemengen linear unabhängiger Mengen

Sei V ein K-Vektorraum.

(i) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

(ii) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Definition (7.1). □

Anmerkung. Insbesondere gilt: $\boxed{\emptyset \text{ ist linear unabhängig}}$!
Nun können wir auf Erzeugendensysteme zurückkommen.

7.4 Satz: Entbehrliche Elemente in linear abhängigen Mengen

Voraussetzung: V K-Vektorraum, $\emptyset \neq M \subseteq V$.
Behauptung: $\boxed{M \text{ lin.abh.} \Leftrightarrow \exists a \in M : \langle M \setminus \{a\} \rangle = \langle M \rangle}$.

Insbesondere sind in einem linear abhängigen Erzeugendensystem Elemente entbehrlich.

Beweis. „$\Rightarrow$“ M lin.abh. $\Rightarrow \exists v_1, \ldots, v_n \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \lambda_i = \vec{o}$ und $\lambda_k \neq 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$; für diese Elemente folgt $v_k \lambda_k = -\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} v_i \lambda_i$, also $v_k = -\big(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} v_i \lambda_i\big) \lambda_k^{-1} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} v_i (-\lambda_i \lambda_k^{-1})$, d.h. $v_k \in \langle M \setminus \{v_k\} \rangle$ und $\langle M \rangle = \langle M \setminus \{v_k\} \rangle$.

„$\Leftarrow$“ $a \in \langle M \rangle = \langle M \setminus \{a\} \rangle \Rightarrow a \in \mathrm{LK}(M \setminus \{a\}) \Rightarrow$
$\exists\, b_1, \ldots, b_n \in M \setminus \{a\},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : a = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \lambda_i \Rightarrow a \cdot 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i (-\lambda_i) = \vec{o} \Rightarrow$
$\{a, b_1, \ldots, b_n\}$ l.a. $\Rightarrow M$ lin.abh.

□

Im Folgenden interessieren wir uns hauptsächlich für linear unabhängige Erzeugendensysteme.

7.5 Definition: Basis

Sei V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann heißt B **Basis** von V g.d.w. B linear unabhängiges Erzeugendensystem ist, also gilt:

(1) B ist linear unabhängig,

(2) $V = \langle B \rangle$.

7.6 Beispiele

(a) In K^n ist $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ mit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ eine Basis, die sogenannte **kanonische Basis** von K^n. Denn B ist linear unabhängig (Bsp. (b) s.o.) und jedes $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ aus K^n ist Linearkombination von B: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \xi_i \in \langle B \rangle$.

(b) Verallgemeinerung:

In $K^{(I)}$ ist $B = \{e_i | i \in I\}$ mit $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$ Basis:

B ist linear unabhängige Teilmenge von K^I (s. Beispiel (c), s.o.) und damit von $K^{(I)}$. Ist $x = (\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$, so gibt es eine endliche Teilmenge J von I mit $\lambda_i = 0$ für

$i \in I \setminus J$; damit gilt $x = \sum_{i \in J} e_i \lambda_i$ (wobei nur endlich viele Summanden auftreten).[40]
Also $K^{(I)} = \langle B \rangle$.

Anmerkung. Ist I unendlich, so ist B keine Basis von K^I. Zum Beispiel lässt sich die konstante Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $K^{\mathbb{N}}$ mit $a_i = a \neq 0$ nicht als Summe von e_i mit endlich vielen Summanden darstellen.

(c) $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ ist (für 'orthogonale Einheitsvektoren' $\vec{n_1}, \vec{n_2}$) eine Basis von $\mathcal{V}$ (dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der Ebene), ebenso $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, wenn $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängige Vektoren sind; (vgl. (1.1)!)

(d) $\emptyset$ ist Basis des Nullraumes eines Vektorraums; denn:

$\emptyset$ ist lin.unabh. (es existiert keine lin.abh. Teilmenge von $\emptyset$) und $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{o}\}$, s.o.!

(e) $B = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^i \,|j \in \mathbb{N}_0\}$ ist Basis von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. (B ist lin.unabh. gemäß Beispiel (d) nach (7.1); $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \langle B \rangle$ gemäß Bsp. (c) nach (6.9)

(e') $B = \{X^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ ist Basis von $K[X]$, dem Vektorraum der Polynome über K.

7.7 Satz (Charakterisierung von Basen)

Sei V ein K-Vektorraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) B ist **Basis** von V; (d.h. B ist lin.unabh. Erzeugendensystem).

(b) B ist eine **maximale linear unabhängige Teilmenge** von V
(d.h. B lin.unabh. und für alle $x \in V \setminus B : B \cup \{x\}$ lin.abh.)

(c) B ist ein **minimales Erzeugendensystem** von V
(d.h $V = \langle B \rangle \wedge \forall x \in B : \langle B \setminus \{x\} \rangle \subsetneqq V$.)

(d) **Jeder Vektor** $v \in V$ lässt sich (abgesehen von Summanden der Form $b_j \cdot 0$, Reihenfolge und Aufspalten von Summanden) **auf genau eine Weise als Linearkombination von B** darstellen.

Beweis.

(a)⇒(b) Ist B Basis, so definitionsgemäß B lin.unabh. $\wedge V = \langle B \rangle \underset{(6.10)}{=} \mathrm{LK}(B)$. Sei $x \in V \setminus B$, dann $x \in \mathrm{LK}(B)$, also $x \cdot 1 = \sum b_i \lambda_i$ und $x \notin B$, und daher $B \cup \{x\}$ lin.abh..

(b)⇒(a) B maximal linear unabhängige Teilmenge ⇒
(B linear unabh. $\wedge \forall x \in V \setminus B : B \cup \{x\}$ lin.abh.) ⇒ (B linear unabhängig und $x \in \mathrm{LK}(B)$ für alle $x \in V$) ⇒ (B lin.unabh. $\wedge V = \mathrm{LK}(B) \underset{(6.10)}{=} \langle B \rangle$).

[40] Man schreibt dann auch $x = \sum_{i \in I} e_i \lambda_i$, wobei zu beachten ist, dass nur endlich viele der formal auftretenden Summanden von $\vec{o}$ verschieden sind.

(a)$\Leftrightarrow$(c) Nach Kontraposition von Satz 7.4 ist ein lin.unabh. Erzeugendensystem minimal und umgekehrt.

(a)$\Rightarrow$(d) Sei B Basis und $v \in V$. Dann gilt $v \in \langle B \rangle = \mathrm{LK}(B)$. Wir zeigen die Eindeutigkeit der Darstellung von v als Linearkombination von B.

Seien $v = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \lambda_i$ und $v = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j \mu_j$ zwei solche Darstellungen (mit $n, m \in \mathbb{N}$, $b_i, c_j \in B$, $\lambda_i, \mu_j \in K$ und paarweise verschiedenen b_i bzw. c_j).

Durch Addieren von Summanden $b_i \mu_i$ mit $\mu_i = 0$ zur zweiten Darstellung im Falle, dass b_i nicht unter den c_j vorkommt, und von Summanden $c_j \lambda_j$ mit $\lambda_j = 0$ zur ersten Darstellung, wenn c_j nicht unter den b_i vorkommt, sowie durch Änderung der Nummerierung (falls $b_i = c_j$) und der Bezeichnungen (z.B. $b_{n+1} := c_1$, falls $c_1 \notin \{b_1, \ldots, b_n\}$ usw.), erhält man

$$v = \sum_{k=1}^{l} b_k \lambda_k \quad \text{und} \quad v = \sum_{k=1}^{l} b_k \mu_k.$$

Zu zeigen ist nun: $\lambda_k = \mu_k$ f.a. $k \in \{1, \ldots, l\}$. Zunächst erhält man

$$\vec{o} = v - v = \sum_{k=1}^{l} b_k \lambda_k - \sum_{k=1}^{l} b_k \mu_k = \sum_{k=1}^{l} b_k (\lambda_k - \mu_k).$$

Als endliche Teilmenge von B ist $\{b_1, \ldots, b_l\}$ linear unabhängig. Damit gilt $\lambda_k - \mu_k = 0$ f.a. $k \in \{1, \ldots, l\}$, was zu zeigen war.

(d)$\Rightarrow$(a) $V = \mathrm{LK}(B) \underset{(6.10)}{\Rightarrow} V = \langle B \rangle$.

Wäre B linear abhängig, so ließe sich $\vec{o}$ auf verschiedene Weisen als Linearkombination von B darstellen.(Wieso ?)

$\square$

7.8 Definition von Koordinaten

Sei V ein K-Vektorraum, der eine endliche Basis $\overline{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ besitzt. Durch die Nummerierung der Elemente von $\overline{B}$ legen wir eine Reihenfolge fest. In diesem Fall sprechen wir von der **geordneten Basis** $B = (b_1, \ldots, b_n)$.
Nach (7.7) lässt sich jedes $x \in V$ auf genau eine Weise in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i$$

darstellen. ξ_i heißt dann die i-te Koordinate von x bzgl. $B = (b_1, \ldots, b_n)$.

Schreibweise: $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B$.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}_B = \sum b_i \xi_i + \sum b_i \eta_i = \sum b_i (\xi_i + \eta_i) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}_B$$

Entsprechend wird die S-Multiplikation komponentenweise ausgeführt.

Anmerkung. Die Zuordnung

$$M_B : \begin{cases} V \to K^n \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus von $(V, +)$ auf $(K^n, +)$, der mit der S-Multiplikation verträglich ist, also eine Bijektion mit

$$M_B(v + w) = M_B(v) + M_B(w) \text{ für alle } v, w \in V$$

und

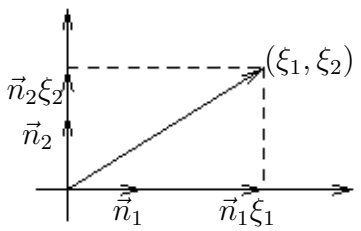
$$M_B(v \cdot \lambda) = M_B(v) \cdot \lambda \text{ für alle } v \in V \text{ und } \lambda \in K$$

(VR-Isomorphismus s.u.).

$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oder auch $M_B(x) := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B$

Beispiele

(1) $\mathcal{V}$ hat die geordnete Basis $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. Jedem $\vec{x} \in \mathcal{V}$ mit $\vec{x} = \vec{n}_1 \xi_1 + \vec{n}_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}_{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ ist durch $M_{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}$ das Paar $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ bzw. $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet; dies ist auch das Koordinatenpaar des Punktes mit Ortsvektor $\vec{x}$. (Siehe Figur 7.1 !)



Figur 7.1: Koordinaten eines Vektors der Ebene.

(2) Sei $V = K^n$, $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Dann gilt $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$.

Eine Verallgemeinerung auf Vektorräume, die eine unendliche Basis besitzen, ist mit Koordinaten-Familien möglich.
Es erhebt sich die Frage nach der Existenz einer Basis in einem beliebigen Vektorraum. Zunächst betrachten wir Vektorräume, die ein endliches Erzeugendensystem besitzen:

7.9 Satz (Basis-Ergänzungs-Satz bei endlichem Erzeugendensystem)

Ist V endlich erzeugter Vektorraum, A linear unabhängige Teilmenge und S ein endliches Erzeugendensystem von V mit $A \subseteq S$, dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq S$.

7.10 Korollar (Basis-Existenz-Satz für endlich erzeugte Vektorräume)

Jeder endlich erzeugte Vektorraum V besitzt eine Basis.

Beweis von (7.10): Man setze $A = \emptyset$, wähle S als endliches Erzeugendensystem von V und wende (7.9) an! □

Beweis von (7.9): Sei S endliches Erzeugendensystem von V, A linear unabhängige Teilmenge von S. Betrachte

$$\mathfrak{X} := \{C \mid A \subseteq C \subseteq S \wedge C \text{ linear unabhängig}\} \ !$$

Da S endlich ist, enthält S nur endlich viele Teilmengen; somit ist $\mathfrak{X}$ endlich. Daher existiert bzgl. der Ordnung "$\subseteq$" mindestens ein maximales Element B in $\mathfrak{X}$. Laut Definition ist $A \subseteq B$. Ist $x \in S$ und $x \notin B$, dann gilt $B \cup \{x\} \subseteq S$ und wegen der Maximalität von B dann $B \cup \{x\} \notin \mathfrak{X}$; daraus folgt die Lineare Abhängigkeit von $B \cup \{x\}$. Da B linear unabhängig ist, erhält man $x \in < B >$. Da x beliebig in $S \setminus B$ gewählt war, ergibt sich $S \subseteq < B >$ und daraus $V =< S >=< B >$. Also ist B Basis. □

Anmerkung: Man kann zeigen, dass die Existenz einer Basis für jeden $K-$Vektorrraum äquivalent zur Gültigkeit des *Auswahlaxioms* bzw. zum *Zornschen Lemma* ist. Wir zeigen hier unter Voraussetzung des Zornschen Lemmas:

7.11 Satz (Basis-Ergänzung und Basis-Existenz allgemein)

Voraussetzung: "Zermelo-Fraenkelsches Axiomensystem + Auswahlaxiom" (ZF+AC bzw. ZFC) bzw. Zornsches Lemma"

(a) Ist V Vektorraum, A linear unabhängige Teilmenge und S ein Erzeugendensystem von V mit $A \subseteq S$, dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq S$.
(b) Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

Beweis von (7.11 (b)): (analog zu 7.10): Man setze $A = \emptyset$ und $S = V$ und wende (7.11 (a)) an! □

Beweis von (7.11 (a)): (a) Definition: Sei

$$\mathfrak{X} := \{C | A \subseteq C \subseteq S \wedge C \text{ lin.unabh.}\} \subseteq \wp(V).$$

Wegen $A \in \mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ und daher $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ nicht-leere geordnete Menge.

(b) Zwischenbehauptung: $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ ist induktiv geordnet (vgl. Def. 2.7.3):

Sei $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X}$ nicht leer und total geordnet, eine sogenannte **Kette**! Wir wollen zeigen, dass $C_{\mathfrak{T}} := \bigcup\limits_{C \in \mathfrak{T}} C$ obere Schranke von $\mathfrak{T}$ in $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ ist, also $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ induktiv geordnet.

(i) Da konstruktionsgemäß $\forall C \in \mathfrak{T} : C \subseteq C_{\mathfrak{T}}$ gilt, ist $C_{\mathfrak{T}}$ obere Schranke; es reicht daher der Nachweis von $C_{\mathfrak{T}} \in \mathfrak{X}$.

(ii) Laut Definition gilt $\forall C \in \mathfrak{T} : A \subseteq C \subseteq S$ und daher $A \subseteq \bigcup\limits_{C \in \mathfrak{T}} C = C_{\mathfrak{T}} \subseteq S$.

(iii) Behauptung: $C_{\mathfrak{T}}$ ist lin.unabh..
Sei $U = \{c_1, \ldots, c_n\}$ endliche Teilmenge von $C_{\mathfrak{T}} = \bigcup\limits_{C \in \mathfrak{T}} C$.
Dann gilt: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \exists C_i \in \mathfrak{T} : c_i \in C_i$. Da $\mathfrak{T}$ total geordnet ist, existiert ein größtes Element C_k in $\{C_1, \ldots, C_n\}$; damit gilt $C_i \subseteq C_k$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $U \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = C_k$. C_k ist linear unabhängig, da $C_k \in \mathfrak{T}$. Daher ist U als endliche Teilmenge linear unabhängig. Also: Jede endliche Teilmenge von $C_{\mathfrak{T}}$ ist linear unabhängig, d.h. $C_{\mathfrak{T}}$ ist linear unabhängig.

Aus (i), (ii) und (iii) folgt: $C_{\mathfrak{T}}$ ist obere Schranke von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{X}$. $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ erfüllt daher die Voraussetzung des **Zornschen Lemmas** (2.7.4); dessen Anwendung liefert:

(c) Es existiert ein maximales Element B in $\mathfrak{X}$.

(d) Behauptung: B ist Basis der geforderten Eigenschaft.

(i) Wegen $B \in \mathfrak{X}$ ist B linear unabhängig und $A \subseteq B \subseteq S$.

(ii) Ist $B = S$, so sind wir fertig. Sei andernfalls $s \in S \setminus B$! Dann gilt $B \cup \{s\} \supsetneqq B$. Da B maximales Element von $\mathfrak{X}$ ist, gilt $B \cup \{s\} \notin \mathfrak{X}$. Aus $A \subseteq B \cup \{s\} \subseteq S$ ergibt sich daher $B \cup \{s\}$ als linear abhängig, also $s \in \langle B \rangle$. Mit $S \subseteq \langle B \rangle$ erhalten wir $V = \langle S \rangle \subseteq \langle B \rangle$ und daraus $V = \langle B \rangle$. $\square$