§ 9 Die affine Geometrie eines Vektorraums

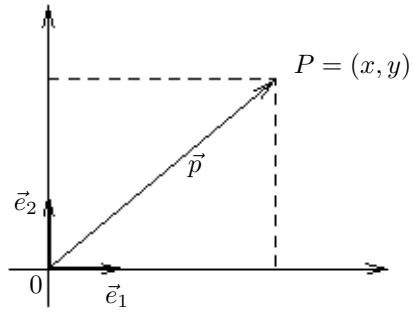
M
↓

Nach Auszeichnung eines kartesischen Koordinatensystems lassen sich die Punkte der Zeichenebene (vgl. (1.1)) durch Koordinatenpaare, also Elemente von $\mathbb{R}^2$ repräsentieren.

Jedem Punkt P lässt sich — wie in (1.1) ausgeführt — **ein Element von $\mathcal{V}$ als Ortsvektor zuordnen**.
Sind $\vec{e}_1$ bzw. $\vec{e}_2$ die Ortsvektoren von $(1,0)$ bzw. $(0,1)$, so ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y$ Ortsvektor von $P = (x,y)$.
Die Ortsvektoren der Geraden $0P$ durch 0 und $P \neq 0$ sind die Elemente von

$$\vec{p}\,\mathbb{R} = \{\vec{p}\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Umgekehrt bestimmt jeder 1-dimensionale Unterraum von $\mathcal{V}$ eine Gerade durch den Nullpunkt.



Figur 9.1 : Zuordnung Punkt-Ortsvektor

Nun ergibt sich eine Möglichkeit, die Unsicherheiten bei der Einführung von $\mathcal{V}$, (Begriffe wie Punkt, Gerade, parallel, Länge, Orientierung waren undefiniert verwandt worden), zu eliminieren:
Als **Modell** für die **Zeichenebene/Anschauungsebene (mit Auszeichnung eines Nullpunktes)** wählen wir $\mathbb{R}^2$, genauer: als Punkte die Elemente (Vektoren) von $\mathbb{R}^2$, als Geraden durch den Nullpunkt die 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. (Weitere Definitionen folgen im Laufe der Vorlesung). Wir sprechen dabei von der **reellen Ebene** später auch von der **euklidischen Ebene**.

Diese Präzisierung erkaufen wir durch „Aufgabe der ontologischen Bindung“: Wir sind uns bewusst, dass es sich lediglich nur um ein Modell für die Zeichenebene handelt. Letzteres hat sich bisher bewährt (– im Gegensatz zu dem Modell $\mathbb{Q}^2$ der Pythagoräer, das zu Widersprüchen mit der Anschauung führte). Ähnlich wählen wir $\mathbb{R}^3$ als Modell für den Anschauungsraum.

Anmerkung. Diese Vorgehensweise innerhalb der Geometrie nennt man „analytisch“ (daher „analytische Geometrie“) im Gegensatz zur „synthetischen“ Vorgehensweise, bei der Punkte, Geraden, Inzidenz, Parallelität etc. axiomatisch eingeführt werden (vgl. das Axiomensystem des 3-dimensionalen Raumes nach HILBERT !) und bei der die Koordinatisierbarkeit durch $\mathbb{R}^3$ erst nach längeren Betrachtungen erhalten wird.

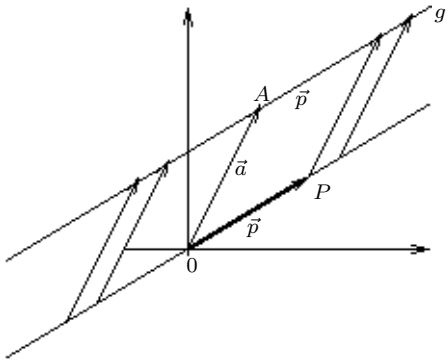
In unserem Modell haben wir zunächst nur die Punkte und die Geraden durch den Nullpunkt beschrieben.

↑
M

Welche Form haben die übrigen Geraden? Dazu gehen wir nochmals zur Zeichenebene zurück:
Eine zur Geraden $g' := 0P$ parallele Gerade g durch den Punkt A mit Ortsvektor $\vec{a}$ entsteht durch Translation (Parallelverschiebung) um den Vektor $\vec{a}$, also Addition von $\vec{a}$:

$$g = \vec{a} + \vec{p}\mathbb{R} = \{\vec{a} + \vec{p}\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(vgl. (1.1) d(ii) ist die Menge der Ortsvektoren der Punkte von g. Also ist g „Nebenklasse“ nach einem Unterraum der Dimension 1.
Umgekehrt stellt jede solche Nebenklasse $\vec{a}+U$ (mit $\dim_{\mathbb{R}} U = 1$) eine zu U parallele Gerade durch den Punkt mit Ortsvektor $\vec{a}$ dar.



Figur 9.2: Zu einer Nullpunkts-Geraden parallele Gerade als Nebenklasse

9.1 Definition: Lineare Mannigfaltigkeit, affiner Unterraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine Teilmenge M von V heißt **lineare Mannigfaltigkeit** (LM) oder **affiner Unterraum** von V, wenn es zu ihr einen Unterraum U_M und ein $a \in V$ gibt mit $M = a + U_M = \{a + u | u \in U_M\}$.
Anmerkungen.

(i) Unterräume sind spezielle lineare Mannigfaltigkeiten: $U = \mathfrak{o} + U$.

(ii) Ist $U_M = \{\mathfrak{o}\}$, so identifizieren wir $M = a + \{\mathfrak{o}\} = \{a\}$ mit $a \in V$.

(iii) Der Repräsentant a von M ist durch M i.A. nicht eindeutig festgelegt (s.u.):

$$\boxed{b \in a + U \Leftrightarrow a + U = b + U \Leftrightarrow a - b \in U} \ .$$

Beweisskizze: $b = a + u \Rightarrow b + U = a + (u + U) = a + U$. Die Umkehrung ist klar ?

Die linearen Mannigfaltigkeiten der Form $a + U$ sind ja auch Nebenklassen nach der Untergruppe U von $(V, +)$.

(iv) Geometrisch erhält man den Unterraum U_M aus $M = a + U_M$ durch Parallelverschiebung (Translation) um den Vektor $-a$ in den Nullpunkt.

M
↓

↑
M

Allgemein ist also nicht verwunderlich, dass U_M durch M eindeutig bestimmt ist.

9.2 Hilfssatz: Zur Eindeutigkeit der Darstellung eines affinen Unterraums

Sei V K-Vektorraum, seien U, U' Unterräume von V und $a, a' \in V$. Dann gilt:

$$a + U = a' + U' \Leftrightarrow a' - a \in U \wedge U = U' \ .$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Sei $a + U = a' + U'$. Dann gilt: $\forall u \in U \ \exists u' \in U' : a + u = a' + u'$.
Setzt man $u = 0$, so ergibt sich $a - a' \in U'$.
Sei nun $u \in U$ mit $u \neq 0$; dann folgt $\exists u' \in U' : u = (a' - a) + u' \in U'$, also $U \subseteq U'$.
Analog folgt $U' \subseteq U$, insgesamt also $U = U'$ sowie $a' - a \in U$.

„$\Leftarrow$“ $U = U' \wedge a' \in a + U \Rightarrow a + U = a' + U = a' + U'$. $\square$

Geometrisch motiviert definieren wir:

9.3 Definition: Dimension einer linearen Mannigfaltigkeit

Sei V K-Vektorraum und $M = a + U$ lineare Mannigfaltigkeit von V mit Unterraum U.

$$\boxed{\dim_K(a + U) := \dim_K U} \ .$$

Beispiele:

(a) $V = \mathcal{V}$ (bzw. $\mathbb{R}^2$).

LM'en der Dimension 0 sind die Punkte (Vektoren) von V (s. Anm. (ii)),

LM'en der Dimension 1 sind die Geraden von V (s. Motivation!),

LM der Dimension 2 ist V selbst.

(b) $V = \mathcal{V}_{\mathrm{r}}$ (bzw. $\mathbb{R}^3$).

LM'en der Dimension 0 sind die Punkte (Vektoren) von V,

LM'en der Dimension 1 sind die Geraden von V,

LM'en der Dimension 2 sind die Ebenen von V,

LM der Dimension 3 ist V selbst.

M
↓

Betrachten wir wieder die Situation in der durch $\mathbb{R}^2$ beschriebenen Zeichenebene bzw. dem durch $\mathbb{R}^3$ beschriebenen Anschauungsraum! Der Punkt P liegt auf der Geraden g bzw. die Gerade g geht durch den Punkt P, wenn $\{P\} \subseteq g$ gilt. Wir sagen auch: P inzidiert mit g. Analog inzidiert die Gerade g mit der Ebene E, wenn $g \subseteq E$ ist.

Zwei Geraden $g = a + \vec{p}\mathbb{R}$ und $h = b + \vec{q}\mathbb{R}$ sind **parallel**, wenn $\vec{q} \in \vec{p}\mathbb{R}$, also $U_g = \vec{p}\mathbb{R} = \vec{q}\mathbb{R} = U_h$, gilt. Zwei Ebenen E und F sind parallel, wenn sie durch Parallelverschiebungen in den Nullpunkt zur selben Ebene führen, also

$$U_E = U_F$$

gilt. Für eine zu E parallele Gerade g haben wir $U_g \subseteq U_E$.

Diese algebraische Beschreibung stellt einen Zusammenhang zwischen Sachverhalten im Vektorraum und geometrischen Gegebenheiten dar. Eine Übertragung auf einen beliebigen Vektorraum V führt zum Begriff der **affinen Geometrie** $\mathrm{AG}(V)$ von V.

Unter affiner Geometrie versteht man allgemein das Studium geometrischer Begriffe wie Punkte, Geraden, Ebenen, Inzidenz, Parallelismus **ohne** Verwendung der Begriffe Länge und Winkel.

↑
M

9.4 Definition: Affine Geometrie eines Vektorraums

Sei V K-Vektorraum mit $1 \leq \dim_K V = n < \infty$.

(a) $\mathrm{AG}(V) := \{M | M \text{ LM von } V\}$

Wir benutzen geometrische Sprechweise:

0–dim	LM'en heißen	Punkte (wir identifizieren sie mit den Vektoren von V),
1–dim	LM'en heißen	Geraden,
2–dim	LM'en heißen	Ebenen
$\vdots$		$\vdots$
i–dim	LM'en heißen	**affine Unterräume** der Dimension i,
$\vdots$		$\vdots$
$(n-1)$-dim	LM'en heißen	**Hyperebenen**.

(b) Für lineare Mannigfaltigkeiten $L, M \in \mathrm{AG}(V)$ definieren wir **Inzidenz** durch

$$L \,\mathrm{I}\, M \Leftrightarrow L \subseteq M \vee M \subseteq L.$$

(Insbesondere: $\{a\} \,\mathrm{I}\, L \Leftrightarrow a \in L$)

Auch hier verwendet man geometrische Sprechweise: Ein Punkt P liegt auf einer Geraden g (statt $P \,\mathrm{I}\, g$) bzw. g geht durch P. Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_s$, die mit einer Geraden g inzidieren, heißen **kollinear**; Punkte einer Ebene heißen **komplanar**.

(c) Zwei lineare Mannigfaltigkeiten $L = a + U_L$ und $M = b + U_M$ (mit Unterräumen U_L und U_M) heißen **parallel**, in Zeichen

$L \parallel M$ g.d.w. gilt $U_L \,\mathrm{I}\, U_M$; also

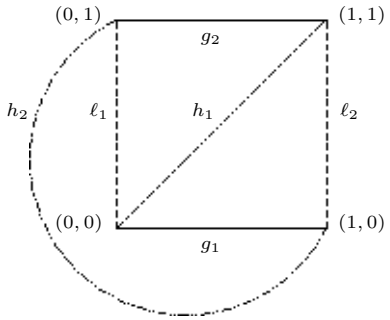
$L \parallel M \Leftrightarrow U_L \subseteq U_M \vee U_M \subseteq U_L$.

(d) $(\mathrm{AG}(V), \mathrm{I}, \parallel)$ heißt **affine Geometrie** von V.

Beispiel (Fortsetzung).
Sei $K = \mathrm{GF}(2)$ und $V = K^2$!

Punkte von $\mathrm{AG}(V)$ sind
$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$$

Geraden sind z.B.
$g_1 = \langle(1,0)\rangle = \{(0,0),(1,0)\}$
$g_1 \parallel g_2 = (0,1) + \langle(1,0)\rangle$
$\qquad = \{(0,1),(1,1)\}$
$h_1 = \langle(1,1)\rangle \parallel h_2 = h_1 + (1,0)$
$\ell_1 = \langle(0,1)\rangle \parallel \ell_2 = \ell_1 + (1,0)$.



Figur 9.3: Veranschaulichung von $\mathrm{AG}(\mathrm{GF}(2)^2)$; (parallele Geraden sind mit gleicher Strichart dargestellt).

Wie in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ erhält man allgemein den folgenden Hilfssatz:

9.5 Hilfssatz: Geraden- und Ebenen-Gleichungen

Sei V K-Vektorraum. Dann gilt

(a) Zu je zwei verschiedenen Punkten p und q von $\mathrm{AG}(V)$ existiert genau eine mit p und q inzidierende Gerade g, nämlich

$$g = p + (q - p)K.$$

(b) Ist $\dim_K V \geq 3$ und sind p, q, r drei nicht-kollineare Punkte von $\mathrm{AG}(V)$, so existiert genau eine mit p, q, r inzidierende Ebene E, nämlich

$$E = r + (p - r)K + (q - r)K.$$

9.6 Hilfssatz: Parallelität in der Ebene

Sei V K-Vektorraum der Dimension 2, seien ferner g und h Geraden in $\mathrm{AG}(V)$. Dann gilt

$$g \parallel h \Leftrightarrow (g = h \vee g \cap h = \emptyset) \Leftrightarrow U_g = U_h \ .$$

Anmerkung: Die Aussage dieses Satzes ist falsch für $\dim V \geq 3$; es existieren dann sogenannte windschiefe Geraden. Daher ist bei $\dim V \geq 3$ zusätzlich zu fordern, dass g und h komplanar sind.

Beweis von Satz 9.6: Seien $g = a + U_g$ und $h = b + U_h$.

(i) Behauptung: $g \parallel h \Leftrightarrow U_g = U_h$.

$$g \parallel h \Leftrightarrow U_g \subseteq U_h \vee U_h \subseteq U_g \quad \underset{\substack{\dim U_g \\ =\dim U_h = 1}}{\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow}} \quad U_g = U_h.$$

(ii) $g \parallel h \underset{\text{(i)}}{\Rightarrow} g, h$ sind Nebenklassen nach dem gleichen Unterraum $\Rightarrow g = h \vee g \cap h = \emptyset$.

(iii) Beh.: $g \cap h = \emptyset \Rightarrow g \parallel h$. Beweis durch Kontraposition: $g \nparallel h \Rightarrow g \cap h \neq \emptyset$.

Sei $g \nparallel h$. Nach (i) ist $U_g = \langle p \rangle \neq \langle q \rangle = U_h$; somit gilt $V = \langle p, q \rangle$ (wegen $\dim_K = 2$) und daher $\exists \lambda, \mu \in K$ mit $a - b = p\lambda + q\mu$; dann ist $a + p(-\lambda) = b + q\mu \in g \cap h$. $\square$

Aufgabe 9.1:
Zeigen Sie für einen beliebigen K-Vektorraum V: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P aus $\mathrm{AG}(V)$ existiert genau eine Gerade $h \in \mathrm{AG}(V)$ mit $P \,\mathrm{I}\, h$ und $g \parallel h$ (**Euklidisches Parallelenaxiom**).

Zusammenfassende Bemerkung

In der affinen Geometrie eines Vektorraums V werden außer den Unterräumen von V auch alle Bilder dieser Unterräume unter Translationen, also die zu ihnen parallelen affinen Unterräume betrachtet.
Dadurch gelangt man zu Modellen (z.B. der Zeichenebene bzw. des Anschauungsraumes), die sich nicht auf die Unterräume durch einen festen Punkt (Ursprung) beschränken; die Bindung an den Ursprung wird so abgemildert.

Ziel

Wir wollen den Zusammenhang von affinen Unterräumen und den Lösungsräumen von linearen Gleichungssystemen untersuchen. Dazu benötigen wir auch die Theorie der Vektorraum-Homomorphismen (linearen Abbildungen).