FUNKTIONALANALYSIS

DIRK WERNER

Die Funktionalanalysis ist diejenige Disziplin der Mathematik, die topologische Vektorräume und die zwischen ihnen wirkenden Abbildungen untersucht.

In der Funktionalanalysis interpretiert man Folgen oder Funktionen als Punkte in einem geeigneten Vektorraum, und man versucht, Probleme der Analysis durch Abbildungen auf einem solchen Raum zu studieren. Zu nichttrivialen Aussagen kommt man aber erst, wenn man die Vektorräume mit einer Norm oder allgemeiner einer Topologie versieht und analytische Eigenschaften wie Stetigkeit etc. der Abbildungen untersucht. Es ist dieses Zusammenspiel von analytischen und algebraischen Phänomenen, das die Funktionalanalysis auszeichnet.

Der Ursprung der Funktionalanalysis liegt Anfang dieses Jahrhunderts in Arbeiten von Hilbert, Schmidt, F. Riesz und anderen; später wurde sie durch Banach und von Neumann, die die heute geläufigen Begriffe des normierten Raums und des Hilbertraums prägten, kanonisiert. Funktionalanalytische Kenntnisse sind mittlerweile in vielen Teilgebieten der Mathematik wie Differentialgleichungen, Numerik, Wahrscheinlichkeitstheorie oder Approximationstheorie sowie in der theoretischen Physik unabdingbar.

Ein Beispiel einer funktionalanalytischen Schlußweise, das gleichzeitig die Entwicklung der Funktionalanalysis wesentlich angeregt hat, liefert die Behandlung der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art

$$\lambda f(s) - \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt = g(s) \qquad (s \in [a,b]), \tag{1}$$

die mit Hilfe des identischen Opeators Id und des linearen Integraloperators

$$(Tf)(s) = \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt$$

in der Form

$$(\lambda \operatorname{Id} - T) f = g \tag{2}$$

ausgedrückt werden kann; hier ist λ ein komplexer Parameter. Sind die Funktionen k und g in (1) stetig, kann man T auf dem mit der Supremumsnorm versehenen Banachraum $C[a,b]$ aller stetigen Funktionen auf $[a,b]$ betrachten; die entscheidende Eigenschaft von T ist dann seine Kompaktheit (kompakter Operator), daher wird die Lösungstheorie der Gleichung (1) oder (2) durch die Fredholm-Alternative beschrieben: Besitzt (2) für $g = 0$ nur die triviale Lösung $f = 0$, so existiert für jede rechte Seite $g \in C[a,b]$ genau eine Lösung $f \in C[a,b]$.

Ausgehend von konkreten Funktionenräumen wie $C[a,b]$ oder $L^p[a,b]$ und Folgenräumen wie ℓ^p, die von Riesz untersucht wurden, entwickelten Banach sowie, unabhängig von ihm, Helly und Wiener Anfang der zwanziger Jahre das Konzept des Banachraums (diese Nomenklatur stammt von Fréchet). Hierbei handelt es sich um einen mit einer Norm $\|\,.\,\|$ versehenen Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, der bzgl. der induzierten Metrik $d(x,y) = \|x - y\|$ vollständig ist. In der Folgezeit bewiesen

Banach und seine Schule (Mazur, Orlicz, Schauder, Steinhaus etc., polnische Schule der Funktionalanalysis) zahlreiche Aussagen über die Struktur eines Banachraums sowie über Eigenschaften stetiger linearer Operatoren zwischen Banachräumen, z.B. den Satz von der offenen Abbildung oder den Satz von Banach-Steinhaus. Als fundamentale Erkenntnis erwies sich dabei, daß einem Banachraum X sein Dualraum X' zugeordnet ist, der aus allen stetigen linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (den stetigen linearen Funktionalen) besteht und im weiteren Sinne als Koordinatensystem für X fungiert. So gilt z.B. als Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach (Hahn-Banach-Sätze) die Normformel

$$\|x\| = \sup\{|x'(x)| : x' \in X',\ \|x'\| \le 1\}.$$

Iteriert man die Konstruktion des Dualraums, wird man auf den Bidualraum X'' geführt, der den Ausgangsraum X auf kanonische Weise enthält (kanonische Einbettung eines Banachraums in seinen Bidualraum). Stimmt X mit X'' überein, heißt X reflexiv; in einem reflexiven Raum gelten Kompaktheitsprinzipien, die in allgemeinen Banachräumen nicht zur Verfügung stehen. Diese beziehen sich jedoch nicht auf die Normtopologie, sondern auf die vom Dualraum induzierte schwache Topologie.

Eine spezielle Klasse von Banachräumen bilden die Hilberträume wie ℓ^2 oder L^2, in denen die Norm gemäß $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ von einem Skalarprodukt abgeleitet ist. Durch das Skalarprodukt kann in einem Hilbertraum die Idee der Orthogonalität ausgedrückt werden, und für lineare Operatoren auf einem Hilbertraum kann man die Symmetriebedingung $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ formulieren, die für beschränkte Operatoren zur Selbstadjungiertheit ($T = T^*$) äquivalent ist (selbstadjungierter Operator). Der Folgenraum ℓ^2 – genau genommen nur dessen Einheitskugel – taucht bereits in Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen auf, in denen er auch seinen Satz über die Spektralzerlegung selbstadjungierter kompakter und beschränkter Operatoren (Hilbertscher Spektralsatz) bewies. Abstrakte Hilberträume wurden erst Ende der zwanziger Jahre nach Vorarbeiten von Schmidt und Weyl von von Neumann und Stone eingeführt; diese Autoren erkannten auch, daß die Symmetrie eines unbeschränkten dicht definierten Operators nicht für eine befriedigende Spektraltheorie ausreicht, und sie initiierten die Theorie der unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren. Diese Operatoren sind in der mathematischen Axiomatik der Quantenmechanik unentbehrlich (Hilbertraum und Quantenmechanik) und umfassen diverse Differentialoperatoren.

Funktionalanalytische Methoden spielen in der Theorie der Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, und zwar einerseits, weil Differentialgleichungsprobleme in geeigneten Banach- und Hilberträumen wie Sobolew-Räumen oder Besow-Räumen formuliert werden können, und andererseits durch Verwendung der Schwartzschen Theorie der Distributionen. Dieses sind stetige lineare Funktionale auf dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aller beliebig häufig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Insbesondere definiert für eine lokal integrierbare Funktion f

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

eine Distribution, so daß Distributionen als verallgemeinerte Funktionen auftreten. Kernstück des Distributionenkalküls ist es nun, daß jede Distribution beliebig häufig differenzierbar ist (Distributionsableitung); also kann jede (lineare) partielle Differentialgleichung im Distributionensinn aufgefaßt und in diesem Kontext untersucht werden, was zu einer weitreichenden Lösungstheorie führt.

Der Testraum $\mathcal{D}(\Omega)$ ist kein Banachraum, sondern ein Beispiel eines lokalkonvexen Raums, in dem die Topologie nicht mit Hilfe einer einzigen Norm, sondern einer ganzen Familie von Normen oder Halbnormen definiert wird. Die Dualitätstheorie der Banachräume einerseits und die Distributionentheorie andererseits hatten großen Einfluß auf die Entwicklung der Theorie der lokalkonvexen Räume in den fünfziger Jahren durch Dieudonné, Grothendieck, Köthe und Schwartz. So zeigt sich etwa, daß $\mathcal{D}(\Omega)$ gewisse Eigenschaften mit den endlichdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^n$ teilt, z.B. ist jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge (beschränkte Menge in einem lokalkonvexen Raum) kompakt, was in keinem unendlichdimensionalen Banachraum vorkommt. Von besonderer Wichtigkeit ist die Tatsache, daß $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ nuklear sind (nuklearer Raum); dies ist der abstrakte Hintergrund des Schwartzschen Kernsatzes.

Außer Differentialoperatoren spielen Integraloperatoren eine fundamentale Rolle in der Analysis. Ist ein Integraloperator der Form

$$(Tf)(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y)\,dy \tag{3}$$

auf einem Banachraum von Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, so gilt die von Riesz entwickelte Eigenwerttheorie (Eigenwert eines Operators): Das Spektrum von T besteht außer der 0 nur aus einer Nullfolge von Eigenwerten, und $\mathrm{Id} - T$ ist ein Fredholm-Operator vom Index 0. Darüber hinaus sind singuläre Integraloperatoren, für die die Kernfunktion k auf der Diagonalen von $\Omega \times \Omega$ eine Singularität der Größenordnung $|x-y|^{-d}$ besitzt, von großer Bedeutung. Für solche Operatoren existiert unter geeigneten Voraussetzungen an k das Integral in (3) im Sinn des Cauchyschen Hauptwerts, und sie sind stetig auf L^p für $1 < p < \infty$, in der Regel jedoch nicht auf L^1 oder L^∞. Im Grenzfall treten der (reelle) Hardy-Raum H^1 und der Raum BMO an die Stelle von L^1 und L^∞. Aus der Theorie singulärer Integraloperatoren hat sich die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren entwickelt.

Manche Banachräume besitzen außer der Vektorraumstruktur eine Multiplikation $(x,y) \mapsto xy$, die die Normbedingung $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$ erfüllt; man spricht dann von einer Banach-Algebra. Beispiele sind $C(K)$ mit dem punktweisen Produkt, $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit dem Faltungsprodukt oder der Raum $L(X)$ aller stetigen linearen Operatoren auf einem Banachraum mit der Komposition als Produkt. In Banach-Algebren kann parallel zum Vorgehen in der Operatortheorie eine Spektraltheorie entwickelt werden (Spektrum eines Elements einer Banach-Algebra). Für eine komplexe kommutative Banach-Algebra A mit Einheit hat Gelfand in den dreißiger Jahren die Menge Γ_A aller multiplikativen linearen Abbildungen von A nach $\mathbb{C}$ (bzw. die Menge der maximalen Ideale) eingeführt. Γ_A ist eine Teilmenge der dualen Einheitskugel $B_{A'}$ und in der Schwach-$*$-Topologie kompakt. Die Gelfand-Transformation ist durch

$$\wedge : A \to C(\Gamma_A), \quad \widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$$

erklärt und ein stetiger Algebrenhomomorphismus; ferner erhält sie die Spektren: $\sigma(a) = \sigma(\widehat{a}) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Gamma_A\}$. I.allg. ist die Gelfand-Transformation weder injektiv noch surjektiv; ist sie injektiv, nennt man A halbeinfach.

Besitzt eine Banach-Algebra eine Involution $x \mapsto x^*$ mit der Normbedingung $\|x^*x\| = \|x\|^2$, spricht man von einer C^*-Algebra. Für eine kommutative C^*-Algebra ist die Gelfand-Transformation bijektiv und isometrisch; eine kommutative C^*-Algebra (mit Einheit) ist also nichts anderes als eine Algebra stetiger Funktionen $C(K)$. Für eine nichtkommutative C^*-Algebra A behauptet der Satz von Gelfand-Neumark (Gelfand-Neumark-Segal-Darstellung) die Existenz einer treuen Darstellung auf einem geeigneten Hilbertraum H; d.h., es gibt einen isometrischen Homomorphismus von A nach $L(H)$, der die Involution erhält. Abstrakte C^*-Algebren sind also nichts anderes als konkrete *-invariante Unteralgebren von $L(H)$. Ist eine solche Unteralgebra in der starken Operatortopologie abgeschlossen, wird sie von-Neumann-Algebra oder W^*-Algebra genannt. Diese Operatoralgebren wurden von Murray und von Neumann zwischen 1936 und 1949 untersucht. Ihre grundlegende Erkenntnis war, daß von-Neumann-Algebren stets paarweise auftreten; zu einer von-Neumann-Algebra M ist nämlich ihr Kommutator M' assoziiert, der aus allen mit sämtlichen Operatoren in M kommutierenden Operatoren besteht. Insbesondere legten sie ihr Augenmerk auf die maximal nichtkommutativen Algebren, die sie Faktoren nannten und die durch die Forderung $M \cap M' = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}$ definiert sind. Sie zeigten, daß diese in drei Klassen, die die technischen Bezeichnungen Typ I, II und III tragen, zerfallen. Ein Faktor vom Typ I ist *-isomorph zu $L(H_0)$ für einen geeigneten Hilbertraum H_0, der eventuell endlichdimensional ist. Wesentlich interessanter sind die Faktoren vom Typ II, denn diese lassen Funktionale mit ähnlichen Eigenschaften wie die Spur (Spur eines Operators) zu, die Anlaß zu einer „nichtkommutativen Integrationstheorie" geben. Die Feinstruktur der Faktoren vom Typ III wurde u.a. von Connes studiert (Connes-Klassifikation von Typ-III-Faktoren); diese sind für die Quantenfeldtheorie besonders bedeutsam.

Probleme der nichtlinearen Funktionalanalysis umfassen u.a. Fixpunkttheorie (Fixpunktsätze), Theorie des Abbildungsgrads und nichtlineare Funktionale und ihre kritischen Punkte. Da die Topologie eines unendlichdimensionalen Raums sich zum Teil drastisch von der eines endlichdimensionalen Raums unterscheidet – z.B. ist jeder unendlichdimensionale Hilbertraum zum Rand seiner Einheitskugel diffeomorph –, treten in der nichtlinearen Funktionalanalysis häufig Kompaktheitsannahmen auf. So besagt der Schaudersche Fixpunktsatz, daß eine stetige Selbstabbildung einer kompakten konvexen Teilmenge eines Banachraums stets einen Fixpunkt besitzt; und mit Hilfe des Leray-Schauderschen Abbildungsgrads studiert man die Lösbarkeit von Gleichungen $F(x) = y$ für nichtlineare Abbildungen der Form $F = \mathrm{Id} - G$, G stetig und kompakt. Hier sind Methoden der algebraischen Topologie von großer Bedeutung. Auch die Morse-Theorie und die Ljusternik-Schnirelman-Theorie kritischer Punkte für nichtlineare Funktionale $f : U \to \mathbb{R}$ wurde vom endlichdimensionalen auf den unendlichdimensionalen Fall ausgedehnt. Hier setzt man häufig die Palais-Smale-Bedingung voraus, die für ein Funktional f mit Fréchet-Ableitung Df verlangt, daß eine Folge mit $\sup |f(x_n)| < \infty$ und $\|Df(x_n)\| \to 0$ eine konvergente Teilfolge hat.

Daß funktionalanalytische Forschung auch heute, fast 100 Jahre nach den Arbeiten von Hilbert, floriert, manifestiert sich u.a. in der Verleihung der Fields-Medaille an Forscher, die epochemachende Beiträge in der Funktionalanalysis geleistet haben. So wurden in jüngerer Zeit C. Fefferman (1978, singuläre Integraloperatoren), A. Connes (1982, von-Neumann-Algebren), V. Jones (1990, von-Neumann-Algebren), J. Bourgain (1994, Geometrie der Banachräume) und W. T. Gowers

(1998, Geometrie der Banachräume) auf dem Internationalen Mathematikerkongreß ausgezeichnet.

Literatur

[1] S. Banach: *Théorie des Opérations Linéaires.* Monografje Matematyczne 1932.
[2] J. Dieudonné: *History of Functional Analysis.* North-Holland 1981.
[3] N. Dunford, J. Schwartz: *Linear Operators, vol. I–III.* Wiley 1958–1971.
[4] R.V. Kadison, J.R. Ringrose: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, vol. I and II.* Academic Press 1983, 1986.
[5] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces, vol. I and II.* Springer 1977, 1979.
[6] M. Reed, B. Simon: *Methods of Mathematical Physics, vol. I–IV.* Academic Press 1972–1979.
[7] W. Rudin: *Functional Analysis.* McGraw-Hill 1973.
[8] J.T. Schwartz: *Nonlinear Functional Analysis.* Gordon and Breach 1969.
[9] L. Schwartz: *Théorie des distributions.* Herman 1966.
[10] E.M. Stein: *Harmonic Analysis.* Princeton University Press 1993.
[11] F. Trèves: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press 1967.
[12] D. Werner: *Funktionalanalysis.* Springer 1995.
[13] P. Wojtaszczyk: *Banach Spaces For Analysts.* Cambridge University Press 1991.
[14] K. Yosida: *Functional Analysis.* Springer, 6. Auflage 1980.
[15] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, vol. I–IV.* Springer 1985–1990.